Improprius integrál

Elmélet

Definition 1 (Definíció) *Legyen* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *és tegyük fel, hogy* f *integrálható az* (a, b) *intervallum minden zárt részintervallumán. Azt mondjuk, hogy az* f *függvény improprius integrálja* $(a, b)-n$ *konvergens, ha* f *valamely* $c \in (a, b)$ *helyhez tartozó*

$$G(x) = \int_c^x f, \quad \text{ha } x \in (a, b),$$

integrálfüggvényére a

$$\lim_{x \to a+} G(x) \text{ és } \lim_{x \to b-} G(x)$$

határérték létezik és véges. Ekkor az

$$I = \lim_{x \to b-} G(x) - \lim_{x \to a+} G(x) = \lim_{x \to b-} \int_c^x f - \lim_{x \to a+} \int_c^x f$$

számot az f *függvény* $(a, b)-n$ *vett improprius integráljának mondjuk, és az*

$$\int_a^b f \text{ vagy } \int_a^b f(x)\, dx.$$

szimbólummal jelöljük. Ha f *improprius integrálja* $(a, b)-n$ *nem konvergens, akkor divergensnek mondjuk.*

Az „improprius" latin eredetű szó jelentése „nem valódi". Az, hogy az improprius integrál értékét ugyanazzal az $\int_a^b f$ szimbólummal jelöljük, mint a Riemann-integrált nem okoz zavart, mert igaz a következő.

Theorem 2 (Tétel) *Legyen* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *és* f *korlátos az* $[a, b]-n$. *Ekkor* $f-nek$ $(a, b)-n$ *pontosan akkor improprius integrálja az* I *szám, ha* f *(Riemann szerint) integrálható* $[a, b]-n$, *és integrálja* I.

Ha $a \in \mathbb{R}$ és f korlátos $a-$nak egy jobb oldali vagy bal oldali környezetében, akkor az improprius integrált egyszerűbben is jellemezhetjük.

Theorem 3 (Tétel) *Legyen* $a \in \mathbb{R}$, $b \in \bar{\mathbb{R}}$ $\left(a \in \bar{\mathbb{R}}, b \in \mathbb{R}\right)$, $a < b$. *Tegyük fel, hogy* f *korlátos* $a-$*nak egy jobb oldali (*$b-$*nek egy bal oldali) környezetében, továbbá* f *integrálható* (a, b) *minden zárt részintervallumán. Az* f *függvény* $(a, b)-n$ *vett improprius integrálja pontosan akkor konvergens, ha a*

$$\lim_{x \to b-} \int_a^x f \qquad \left(\lim_{x \to a+} \int_x^b f\right)$$

határérték létezik és véges, konvergencia esetén pedig

$$\int_a^b f = \lim_{x \to b-} \int_a^x f \qquad \left(\int_a^b f = \lim_{x \to a+} \int_x^b f\right).$$

Feladatok

1. Számítsa ki az alábbi improprius integrált!

   (a)
   $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(x)}{1+x^2}dx,$$
   (b)
   $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}dx,$$
   (c)
   $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx,$$

2. Számítsa ki az alábbi improprius integrált! **(Nehezebb feladatok.)**

   (a)
   $$\int_0^\infty \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx,$$
   (b)
   $$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln^3(x)}dx,$$
   (c)
   $$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\ln(x)\,dx,$$
   (d)
   $$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+4x+8}dx,$$
   (e)
   $$\int_0^1 \frac{1}{x\ln^2(x)}dx,$$
   (f)
   $$\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx,$$
   (g)
   $$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+2x+5}dx,$$

(h)

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^x}{1-e^x} dx,$$

(i)

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{3}{(x-2)(x-5)} dx$$

(j)

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+4x+6} dx,$$