Függvényvizsgálat

Elmélet

Theorem 1 (Monotonitási kritériumok) *Legyen $I \subset \mathbb{R}$. Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos $I-$n, differenciálható I belsejében, és $f' \geq 0$ $(f' \leq 0)$ I belsejében, akkor f az I intervallumon monoton növekedő (monoton csökkenő), ha az $f' \geq 0$ $(f' \leq 0)$ feltételt az $f' > 0$ $(f' < 0)$ feltételre cseréljük, akkor f szigorúan monoton növekedő (szigorúan monoton csökkenő) az I intervallumon.*

Definition 2 (Definíció) *Legyen adva egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény. Az $a \in domf$ számot az f* ***abszolút maximumhelyének (abszolút minimumhelyének) nevezzük,*** *ha minden $x \in domf$ esetén $f(x) \leq f(a)$ $(f(x) \geq f(a))$.*

Az abszolút minimumhely és az abszolút maximumhely közös neve **abszolút** vagy **globális szélsőértékhely.**

Definition 3 (Definíció) *Az $a \in domf$ szám az f* ***lokális maximumhelye (lokális minimumhelye),*** *ha f definiálva van a valamely $\delta-$sugarú környezetében $(\delta > 0)$, továbbá minden $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ esetén $f(x) \leq f(a)$ $(f(x) \geq f(a))$.*

Definition 4 (Definíció) *Az $a \in domf$ szám az f* ***szigorú lokális maximumhelye (szigorú lokális minimumhelye),*** *ha f definiálva van a valamely $\delta-$sugarú környezetében $(\delta > 0)$, továbbá minden $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ esetén $f(x) < f(a)$ $(f(x) > f(a))$.*

A lokális minimumhely és a lokális maximumhely közös neve **lokális szélsőértékhely.**

Theorem 5 (Tétel) *Ha $a \in domf$ szám az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény lokális szélsőértékhelye és f differenciálható az a helyen, akkor $f'(a) = 0$.*

Definition 6 (Definíció) *Azokat az a pontokat, amelyekre $f'(a) = 0$ az f függvény kritikus (stacionárius) pontjainak nevezzük.*

Theorem 7 (Tétel) *Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Ha f folytonos $[a, b]-$n,akkor legnagyobb (legkisebb) értékét vagy az intervallum valamelyik végpontjában, vagy pedig olyan $c \in (a, b)$ pontban veszi fel, ahol $f'(c) = 0$ vagy $f'(c)$ nem létezik.*

Definition 8 (Definíció) *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$. Az f függvényt az I intervallumon* ***konvex****nek (****konkáv****nak) nevezzük, ha bármely $x_1, x, x_2 \in I$ $x_1 < x < x_2$ esetén*

$$f(x) \leq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_1) + f(x_1),$$

$$\left(f(x) \geq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_1) + f(x_1) \right).$$

Az f függvényt az I intervallumon ***szigorúan konvex****nek (****szigorúan konkáv****nak) nevezzük, ha bármely $x_1, x, x_2 \in I$ $x_1 < x < x_2$ esetén*

$$f(x) < \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_1) + f(x_1),$$

$$\left(f(x) > \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_1) + f(x_1) \right).$$

Theorem 9 (Tétel) *Ha f folytonos az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon és f' (szigorúan) monoton növekedő ((szigorúan) monoton csökkenő) I belsejében, akkor az f függvény $I-$n* ***(szigorúan) konvex ((szigorúan) konkáv).***

Speciálisan, ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos az $I-$n és $f'' \geq 0$ ($f'' \leq 0$) I belsejében, akkor f az $I-$n konvex (konkáv), ha pedig a $\geq$ ($\leq$) egyenlőtlenséget $> -$re ($< -$ra) cseréljük, akkor f $I-$n ***szigorúan konvex (szigorúan konkáv).***

Feladatok

1. Vizsgálja meg az alábbi függvényt monotonitás szempontjából és adja meg a lokális szélsőértékhelyeit!

   (a)
   $$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^x}{(1-x)^2},$$

   (b)
   $$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{x+\frac{1}{x}},$$

   (c)
   $$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2}{x+2},$$

   (d)
   $$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 4\ln(x) + \frac{2}{x-1},$$

   (e)
   $$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 4x^2 - \frac{1}{x},$$

   (f)
   $$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x-2},$$

   (g)
   $$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{arctg}(x) + \frac{1}{x-1},$$

   (h)
   $$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -3\ln(2x+1) - \frac{2}{x}.$$

2. Vizsgálja meg az alábbi függvényt konvexitás szempontjából!

   (a)
   $$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + \frac{1}{6x^3},$$

   (b)
   $$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 - \frac{48}{x},$$

   (c)
   $$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp\left(\frac{1}{x-3}\right) = e^{\frac{1}{x-3}},$$

   (d)
   $$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (x+1)^2 + \frac{1}{x},$$

(e)

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + \frac{8}{x-1},$$

(f)

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}},$$

(g)

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - \frac{1}{x},$$

(h)

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^x}{x}.$$