Függvényvizsgálat

Elmélet

Theorem 1 (Monotonitási kritériumok) *Legyen $I \subset \mathbb{R}$. Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos $I-$n, differenciálható I belsejében, és $f' \geq 0$ $(f' \leq 0)$ I belsejében, akkor f az I intervallumon monoton növekedő (monoton csökkenő), ha az $f' \geq 0$ $(f' \leq 0)$ feltételt az $f' > 0$ $(f' < 0)$ feltételre cseréljük, akkor f szigorúan monoton növekedő (szigorúan monoton csökkenő) az I intervallumon.*

Definition 2 (Definíció) *Legyen adva egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény. Az $a \in \operatorname{dom} f$ számot az f **abszolút maximumhelyének (abszolút minimumhelyének) nevezzük,** ha minden $x \in \operatorname{dom} f$ esetén $f(x) \leq f(a)$ $(f(x) \geq f(a))$.*

Az abszolút minimumhely és az abszolút maximumhely közös neve **abszolút** vagy **globális szélsőértékhely.**

Definition 3 (Definíció) *Az $a \in \operatorname{dom} f$ szám az f **lokális maximumhelye (lokális minimumhelye),** ha f definiálva van a valamely $\delta-$sugarú környezetében $(\delta > 0)$, továbbá minden $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ esetén $f(x) \leq f(a)$ $(f(x) \geq f(a))$.*

Definition 4 (Definíció) *Az $a \in \operatorname{dom} f$ szám az f **szigorú lokális maximumhelye (szigorú lokális minimumhelye),** ha f definiálva van a valamely $\delta-$sugarú környezetében $(\delta > 0)$, továbbá minden $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ esetén $f(x) < f(a)$ $(f(x) > f(a))$.*

A lokális minimumhely és a lokális maximumhely közös neve **lokális szélsőértékhely.**

Theorem 5 (Tétel) *Ha $a \in \operatorname{dom} f$ szám az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény lokális szélsőértékhelye és f differenciálható az a helyen, akkor $f'(a) = 0$.*

Definition 6 (Definíció) *Azokat az a pontokat, amelyekre $f'(a) = 0$ az f függvény kritikus (stacionárius) pontjainak nevezzük.*

Theorem 7 (Tétel) *Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Ha f folytonos $[a, b]-$n,akkor legnagyobb (legkisebb) értékét vagy az intervallum valamelyik végpontjában, vagy pedig olyan $c \in (a, b)$ pontban veszi fel, ahol $f'(c) = 0$ vagy $f'(c)$ nem létezik.*

Definition 8 (Definíció) *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$. Az f függvényt az I intervallumon **konvex**nek (**konkáv**nak) nevezzük, ha bármely $x_1, x, x_2 \in I$ $x_1 < x < x_2$ esetén*

$$f(x) \leq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_1) + f(x_1),$$

$$\left(f(x) \geq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_1) + f(x_1) \right).$$

*Az f függvényt az I intervallumon **szigorúan konvex**nek (**szigorúan konkáv**nak) nevezzük, ha bármely $x_1, x, x_2 \in I$ $x_1 < x < x_2$ esetén*

$$f(x) < \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_1) + f(x_1),$$

$$\left(f(x) > \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_1) + f(x_1) \right).$$

Theorem 9 (Tétel) *Ha f folytonos az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon és f' (szigorúan) monoton növekedő ((szigorúan) monoton csökkenő) I belsejében, akkor az f függvény $I-$n* ***(szigorúan) konvex ((szigorúan) konkáv).***

Speciálisan, ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos az $I-$n és $f'' \geq 0$ ($f'' \leq 0$) I belsejében, akkor f az $I-$n konvex (konkáv), ha pedig a $\geq$ ($\leq$) egyenlőtlenséget $>$ $-$re ($<$ $-$ra) cseréljük, akkor f $I-$n ***szigorúan konvex (szigorúan konkáv).***

Feladatok

1. Vizsgálja meg az alábbi függvényt!

   (a)
   $$f(x) = x^3 - 3x^2, \quad x \geq 0,$$
   (b)
   $$f(x) = 3x - x^3, \quad x \geq 0,$$
   (c)
   $$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad x > 0,$$
   (d)
   $$f(x) = \frac{x}{1-x^2}, \quad x \in (-\infty; 1) \setminus \{-1\},$$
   (e)
   $$f(x) = \frac{x}{e^x}, \quad x \in \mathbb{R},$$
   (f)
   $$f(x) = \frac{x-3}{x-2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

2. Határozza meg az alábbi függvény globális szélsőértékeit! Hol veszi fel ezeket?

   (a)
   $$f(x) = \frac{x^3}{3} - x + 5, \quad x \in [0,3],$$
   (b)
   $$f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 8x + 1, \quad x \in [0,3],$$
   (c)
   $$f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 36x, \quad x \in [-1;4],$$
   (d)
   $$f(x) = \frac{4}{x^2+1}, \quad x \in [-2,1]$$

3. Adja meg azokat az intervallumokat, amelyeken az alábbi függvény monoton növekedő illetve monoton csökkenő!

   (a)
   $$f(x) = xe^{-2x}, \quad x \in \mathbb{R},$$
   (b)
   $$f(x) = x - \ln x + \frac{2}{x}, \quad x > 0,$$

(c)

$$f(x) = x - \ln x^2 + \frac{3}{x}, \quad x \neq 0.$$

4. Adja meg azokat az intervallumokat, amelyeken az alábbi függvény konvex illetve konkáv!

(a)

$$f(x) = xe^{3x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

(b)

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

(c)

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \diagdown \{-1; 1\}.$$