Többváltozós függvények határértéke

Elmélet

Definition 1 (Definíció) *Legyen* $p, q \in \mathbb{N}^{+}$. *Azt mondjuk, hogy a* $b \in \mathbb{R}^q$ *pont az* $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *függvény határértéke az* $a \in \mathbb{R}^p$ *pontban, ha* f *értelmezve van a valamely pontozott környezetében, és bármely olyan* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *sorozatra, amelyre* $x_n \in dom\,(f)$ $x_n \neq a$ *minden* $n \in \mathbb{N}-$*re, és* $x_n \to a$, *a függvényértékek* $\{f\,(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ *sorozata* $b-$*hez tart. Jelölés: Jelölés:*$f\,(x) \to b$, *ha* $x \to a$ *vagy*

$$\lim_{x \to a} f\,(x) = b.$$

Definition 2 (Definíció) *Azt mondjuk, hogy az* $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *függvény folytonos az* $a \in dom\,(f)$ *pontban, ha* $\lim_{x \to a} f\,(x) = f\,(a)$, *azaz ha* f *értelmezve van a valamely környezetében, és bármely olyan bármely olyan* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *sorozatra, amelyre* $x_n \in dom\,(f)$ $x_n \to a$, *a függvényértékek* $\{f\,(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ *sorozata* $f\,(a)-$*hez tart.*

Legyen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

ekkor a

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f\,(x, y)$$

jelölést használjuk az (x_0, y_0) pontbeli határértékre.

Feladatok

1. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

$$(a) \quad \lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{\sin\,(xy - y)}{y - 1} \qquad (b) \quad \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{\sqrt{xy + 2} - \sqrt{y - 2}}{x - 1}$$

$$(c) \quad \lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{\sqrt{x^2 - xy} - \sqrt{xy}}{x - 2y} \qquad (d) \quad \lim_{(x,y)\to(-1,3)} \frac{\sqrt{y^2 + 2xy} - \sqrt{-xy}}{3x + y}$$

$$(e) \quad \lim_{(x,y)\to(4,1)} \frac{\sqrt{x^2 - 3xy} - 2y}{x - 4y} \qquad (f) \quad \lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{\sin\,(x^2 - 4y^2)}{x - 2y}$$

2. Igazolja, hogy az alábbi függvényhatárérték nem létezik!

$$(a) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x - y}{x + y} \qquad (b) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

$$(c) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\,(x + y)}{x} \qquad (d) \quad \lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}$$

3. Igazolja, hogy az alábbi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény nem folytonos az $(x_0, y_0) = (0, 0)$ helyen!

$$(a) \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^3}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}, \qquad (b) \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

$$(c) \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & \textit{különben} \end{cases}, \qquad (d) \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{y}, & x \neq 0 \\ 0, & \textit{különben} \end{cases},$$