Egyváltozós függvények differenciálszámítása

Elmélet
A differenciálhatóság fogalma

Definition 1 (Definíció) *Legyen az* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *függvény értelmezve az* $a\in dom f$ *pont valamely környezetében, és legyen* $x\in dom f\setminus\{a\}$. *Az*

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

hányadost az f *függvény* a *és* x *helyekhez tartozó* ***különbségi (differencia) hányadosá****nak nevezzük.*

Definition 2 (Definíció) *Ha a*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

határérték létezik és véges, akkor az f *függvény* ***differenciálható*** *az* a *helyen, a határértéket pedig az* f *függvény* a *pontbeli* ***differenciálhányados****ának nevezzük. Jele:* $f'(a)$.

Definition 3 (Definíció) *Az* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *függvény* a *pontbeli* ***jobb oldali (bal oldali) differenciálhányados****ának nevezzük a*

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\quad\left(\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$$

határértéket, feltéve, hogy ez a határérték létezik és véges. Jele: $f'_+(a)\ \left(f'_-(a)\right)$.

Theorem 4 (Tétel) *Ha az* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *függvény és a* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *függvény differenciálható az* a *helyen, akkor ugyanolyan az* $f\pm g$, $f\cdot g$ *és a* $g(a)\neq 0$ *feltétel mellett az* $\dfrac{f}{g}$ *függvény is, mégpedig*

$$\begin{aligned}(f\pm g)'(a) &= f'(a)\pm g'(a),\\ (f\cdot g)'(a) &= f'(a)\,g(a)+f(a)\,g'(a),\\ \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \frac{f'(a)\,g(a)-f(a)\,g'(a)}{g^2(a)}.\end{aligned}$$

Theorem 5 (Tétel) *Ha a* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *függvény differenciálható az* a *helyen és az* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *függvény differenciálható a* $g(a)$ *helyen, akkor az* $f\circ g$ *függvény is differenciálható az* a *helyen, mégpedig*

$$(f\circ g)'(a)=f'(g(a))\cdot g'(a).$$

Definition 6 (Definíció) *Ha az* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *függvény differenciálható az* a *helyen, akkor az*

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

egyenest az f *függvény* a *helyhez tartozó* ***érintő****jének nevezzük.*

Elemi függvények deriváltjai

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$

$f(x)$	$f'(x)$
$\cos x$	$-\sin x$
tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctg\ x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$arcctg\ x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

$$c, \alpha \in \mathbb{R}, \qquad a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$$

Feladatok

1. A definíció alapján határozza meg az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = tg(x-1)$ függvény deriváltját az $1-$nél.

   (a) Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \dfrac{\sin\left((x-2)^2\right)}{3(x-2)}$. Adja meg azt a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre $g(x) = f(x)$ bármely $x \neq 2$ esetén, és a g folytonos a $2-$nél.

   (b) Differenciálható-e a g a $2-$nél? Ha igen, határozza meg a $g'(2)-$t!

2. Differenciálható-e a $-2-$nél az alábbi függvény?

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left((x^{-}2)^2\right)}{x+2}, & x \neq -2 \\ 0, & x = -2 \end{cases}.$$

3. Differenciálható-e a $2-$nél az alábbi függvény?

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2-4x+5}-1}{x-2}, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}.$$

4. Differenciálható-e a $0-$nál az alábbi függvény?

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

5. Adja meg az alábbi függvény deriváltját!

(a)

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\arcsin(x^3)}{2^{3x}} - \sin(\ln(x))\sqrt{x^6 + 2x} + arctg^2(e^x),$$

(b)

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{tg(\sqrt{x})}{x^2 + 1} - \ln\left(\sin^5(x) + 1\right) + 2arctg(e^x)\, x^3,$$

(c)

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = ctg(\ln(x))\sqrt{x} + 5\arcsin\left(e^{x^3}\right) - \frac{(x^2 + 1)^{10}}{\cos(x)},$$

(d)

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{tg(x^3)}{\ln(x)} + 4\sqrt{\arcsin(5x)} + \cos(x)\, 2^{x^{1/3}},$$

(e)

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 arctg(\ln(x)) - 2\frac{3^{\sqrt{2x+1}}}{\sin(x)} + tg^5(8x).$$

(a) Adja meg az

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -3\ln(2x + 2) - \frac{2}{x}$$

függvény grafikonjának azt az érintőjét, amely illeszkedik a $(0, 0)$ pontra!

(b) Adja meg az

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2}$$

függvény grafikonjának azt az érintőjét, amely illeszkedik a $(0, 1)$ pontra!

(c) Adja meg az

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x - 1}$$

függvény grafikonjának azt az érintőjét, amely illeszkedik a $(0, 0)$ pontra!

(d) Adja meg az

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x - 1}$$

függvény grafikonjának azt az érintőjét, amely illeszkedik a $(0, 0)$ pontra!