Absztrakt vektorterek

Összeállította: dr. Leitold Adrien egyetemi docens

1. Az alábbi $H \subset P_R^2$ vektorhalmaz lineárisan független, vagy lineárisan összefüggő?
   $p_1 : R \to R,\ \ x \mapsto 3x^2 - 2x + 5$
   $p_2 : R \to R,\ \ x \mapsto -x^2 + x - 2$
   $p_3 : R \to R,\ \ x \mapsto 3x^2 - x + 4$
   $H := \{p_1, p_2, p_3\}$

2. Az alábbi $H \subset P_R^5$ vektorhalmaz lineárisan független, vagy lineárisan összefüggő?
   $p_1 : R \to R,\ \ x \mapsto x^5 - 2x$
   $p_2 : R \to R,\ \ x \mapsto x^4 + 3$
   $p_3 : R \to R,\ \ x \mapsto x^3 + 2x^2$
   $H := \{p_1, p_2, p_3\}$

3. Igazolja, hogy a
   $p_1 : R \to R,\ \ x \mapsto x^3 - 2x,$ a $p_2 : R \to R,\ \ x \mapsto x + 5,$ és a $p_3 : R \to R,\ \ x \mapsto 2$ polinomok lineárisan függetlenek a P_R^3 vektortérben! Bázist alkotnak-e a fenti polinomok P_R^3-ban?

4. Tekintsük az R^N vektortér következő elemeit!
   $a_1 := 1, 0, 0, \ldots$
   $a_2 := 1, 1, 0, 0, \ldots$
   $a_3 := 1, 1, 1, 0, 0, \ldots$
   $a_4 := 1, 1, 1, 1, 0, 0, \ldots$
   Igazolja, hogy a $H := \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ vektorhalmaz lineárisan független!

5. Legyenek $p_1 : R \to R,\ x \mapsto 1;$ $p_2 : R \to R,\ x \mapsto x + 1;$ $p_3 : R \to R,\ x \mapsto x^2 + x + 1;$ polinomok.
   Bázist alkotnak-e a p_1, p_2 és p_3 polinomok a P_R^2 vektortérben? Ha igen, akkor adjuk meg a $p : R \to R,\ x \mapsto 3x^2 + 2x - 4$ polinom ezen bázisra vonatkozó koordinátáit!

6. Legyenek $p_1 : R \to R,\ x \mapsto x^2 + x + 1;$ $p_2 : R \to R,\ x \mapsto x + 1;$ $p_3 : R \to R,\ x \mapsto x;$ polinomok.
   Bázist alkotnak-e a p_1, p_2 és p_3 polinomok a P_R^2 vektortérben? Ha igen, akkor adjuk meg a $p : R \to R,\ x \mapsto 2x^2 + 1$ polinom ezen bázisra vonatkozó koordinátáit!

7. Legyenek $p_1 : R \to R,\ x \mapsto x^2 + 1;$ $p_2 : R \to R,\ x \mapsto x + 1;$ $p_3 : R \to R,\ x \mapsto x^2 + x;$ polinomok.
   Bázist alkotnak-e a p_1, p_2 és p_3 polinomok a P_R^2 vektortérben? Ha igen, akkor adjuk meg a $p : R \to R,\ x \mapsto 6x^2 + 7x + 5$ polinom ezen bázisra vonatkozó koordinátáit!

8. Bázist alkotnak-e az $R^{2\times 2}$ vektortérben az *A, B, C* és *D* mátrixok? Ha igen, akkor határozza meg az *X* mátrix ezen bázisra vonatkozó koordinátáit!
$$A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

9. Bázist alkotnak-e az $R^{2\times 2}$ vektortérben az *A, B, C* és *D* mátrixok? Ha igen, akkor határozza meg az *X* mátrix ezen bázisra vonatkozó koordinátáit!
$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

10. Tekintsük a P_R vektorteret!
$V_1 := \{p \in P_R \text{ , } p \text{ másodfokú}\}$,
$V_2 := \{p \in P_R \text{ , } p \text{ legfeljebb negyedfokú}\}$,
$V_3 := \{p \in P_R \text{ , } \forall x \in R : p(x) \geq 0\}$,
$V_4 := \{p \in P_R \text{ , } p \text{ páros fokszámú}\}$,
$V_5 := \{p \in P_R \text{ , } \forall x \in R : p(x) = p(-x)\}$.
Döntse el, hogy $V_1, \dots, V_5$ a leszűkített műveletekkel altér-e a P_R vektortérben!

11. Tekintsük az R^N vektorteret!
$V_1 := \{(a_n) \in R^N, \text{az } (a_n) \text{ sorozat első eleme } 0\}$,
$V_2 := \{(a_n) \in R^N, \text{az } (a_n) \text{ sorozat konvergens}\}$,
$V_3 := \{(a_n) \in R^N, \lim(a_n) = a\}$, ahol $a \in R$ rögzített,
$V_4 := \{(a_n) \in R^N, \text{az } (a_n) \text{ sorozatnak csak véges sok 0 - tól különböző eleme van}\}$,
$V_5 := \{(a_n) \in R^N, \text{az } (a_n) \text{ sorozat elemei pozitívak}\}$,
$V_6 := \{(a_n) \in R^N, \lim(a_n) = \infty\}$.
Döntse el, hogy $V_1, \dots, V_6$ a leszűkített műveletekkel altér-e az R^N vektortérben!

12. Legyen $\mathrm{I} \subset R$ az origóra szimmetrikus intervallum. Tekintsük az R^{I} vektorteret!
$V_1 := \{f \in R^I, f \text{ folytonos}\}$,
$V_2 := \{f \in R^I, f(0) \geq 0\}$,
$V_3 := \{f \in R^I, \forall x \in \mathrm{I} : f(x) = f(-x)\}$,
$V_4 := \{f \in R^I, f(x) = 0, \text{ véges sok } x \text{ kivételével}\}$,
$V_5 := \{f \in R^I, f \text{ monoton növekvő}\}$,
$V_6 := \{f \in R^I, f \text{ korlátos}\}$.
Döntse el, hogy $V_1, \dots, V_6$ a leszűkített műveletekkel altér-e az R^{I} vektortérben!

13. Tekintsük az $R^{n\times n}$ vektorteret!
$V_1 := \{A \in R^{n\times n}, A \text{ diagonális}\}$,
$V_2 := \{A \in R^{n\times n}, A \text{ alsóháromszög mátrix}\}$,
$V_3 := \{A \in R^{n\times n}, A \text{ utolsó oszlopában 0 - k állnak}\}$,
$V_4 := \{A \in R^{n\times n}, A \text{ invertálható}\}$,

$V_5 := \{A \in R^{n\times n}, \det(A) = 0\}$,
$V_1 := \{A \in R^{n\times n}, A = A^T\}$,
$V_7 := \{A \in R^{n\times n}, A \text{ minden eleme egyenlő}\}$.
Döntse el, hogy V_1, … ,V_7 a leszűkített műveletekkel altér-e az $R^{n\times n}$ vektortérben! Ha alterek, mennyi a dimenziójuk?

14. Adjon meg a P_R^3 vektortérben egy 2-dimenziós és két 1-dimenziós alteret úgy, hogy azok direkt összege legyen P_R^3!

15. Adjon meg az $R^{2\times 3}$ vektortérben egy 3-dimenziós, egy 2-dimenziós és egy 1-dimenziós alteret úgy, hogy azok direkt összege legyen $R^{2\times 3}$!

16. Az alábbi leképezések közül melyek lineárisak?
   a, $A: C \to C,\ z \mapsto \mathrm{Re}(z)$
   b, $A: C \to C,\ z \mapsto \overline{z}$
   c, $A: C \to C,\ z \mapsto |z|$

17. Igazolja, hogy az alábbi leképezések lineárisak! Adja meg magterüket és képterüket!
   a, $A: P_R \to P_R,\ p \mapsto p'$ (deriválás)
   b, $A: P_R \to P_R,\ p \mapsto p \cdot g$ ($g \in P_R$ rögzített)
   c, $A: P_R \to R,\ p \mapsto p(\alpha)$ ($\alpha \in R$ rögzített)
   d, $A: P_R \to P_R^n$, minden polinomhoz hozzárendeljük a legfeljebb n-edfokú tagjaiból képzett polinomot ($n \in N$ rögzített)
   e, Jelölje V a valós számokból álló konvergens sorozatok halmazát.
   $A: V \to R,\ (a_n) \mapsto \lim(a_n)$
   f, $A: D(I) \to R^I\quad f \mapsto f'$ (deriválás)
   g, $A: R^I \to R,\ f \mapsto f(x_0)$ ($x_0 \in I$ rögzített)

18. Tekintsük az alábbi polinomokat!
   $g\ : R \to R,\ x \mapsto x^2 + 1$,
   $p_n : R \to R,\ x \mapsto x^n,\quad n = 0, 1, 2, 3, 4.$
   Legyen $B_1 = \{p_0, p_1, p_2\}$ bázis a P_R^2 vektortérben, $B_2 = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$ bázis a P_R^4 vektortérben.
   Adja meg az $A: P_R^2 \to P_R^4,\ p \mapsto p \cdot g$ lineáris leképezés $B_1 - B_2$ bázisokra vonatkozó mátrixát!

19. Tekintsük az alábbi polinomokat!
   $p_n : R \to R,\ x \mapsto x^n,\quad n = 0, 1, 2, 3, 4.$
   Legyen $B_1 = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$ bázis a P_R^4 vektortérben, $B_2 = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ bázis a P_R^3 vektortérben.
   Adja meg az $A: P_R^4 \to P_R^3,\ p \mapsto p'$ (deriválás) lineáris leképezés $B_1 - B_2$ bázisokra vonatkozó mátrixát!