Írta:
GYŐRI ISTVÁN
PITUK MIHÁLY

KALKULUS INFORMATIKUSOKNAK II.

Egyetemi tananyag

TYPOTEX

2011

LEKTORÁLTA: Dr. Molnárka Győző, Széchenyi István Egyetem Műszaki Tudományi Kar Mechatronika és Gépszerkezettan Tanszék

TÁMOGATÁS:
Készült a TÁMOP-4.1.2-08/1/A-2009-0008 számú, „Tananyagfejlesztés mérnök informatikus, programtervező informatikus és gazdaságinformatikus képzésekhez” című projekt keretében.

ESZA TÁRSADALMI SZOLGÁLTATÓ NONPROFIT KFT.

ISBN 978-963-279-505-8

KÉSZÜLT: a Typotex Kiadó gondozásában
FELELŐS VEZETŐ: Votisky Zsuzsa
AZ ELEKTRONIKUS KIADÁST ELŐKÉSZÍTETTE: Juhász Lehel

KULCSSZAVAK:
végtelen sor, hatványsor, többváltozós függvény, folytonosság, határérték, differenciál, területi integrál, közönséges differenciálegyenlet, z-transzformált

ÖSSZEFOGLALÁS:
A jegyzet a *Kalkulus informatikusoknak I.* c. jegyzet folytatása, a Pannon Egyetem Műszaki Informatikai Karán oktatott Matematikai analízis II. kurzus anyagának összefoglalása informatikus és villamosmérnök hallgatók részére. Az olvasó megismerkedhet a végtelen sorok és hatványsorok fogalmával, a többváltozós függvények differenciálszámításával, a területi integrállal és közönséges differenciálegyenletek néhány egyszerűbb típusával. Egy információátviteli probléma kapcsán ismertetésre kerül a z-transzformált fogalma és fontosabb tulajdonságai.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Ez a jegyzet a „Kalkulus informatikusoknak I.” című jegyzetünk folytatása, és a TÁMOP - 4.1.2-08/1/A program keretében készült. A Pannon Egyetem Műszaki Informatikai Karán éveken át tartott „Matematikai analízis II.” kurzusunk anyagát foglaltuk össze benne. Ezzel szertnénk segíteni az informatikus és villamosmérnök hallgatókat a sikeres vizsgára való felkészülésben. A jegyzetben tárgyaljuk a végtelen számsorok és hatványsorok fontosabb tulajdonságait, a többváltozós függvények differenciálszámítását, a területi integrált és skaláris differenciálegyenletek néhány egyszerűbb típusát. Külön hangsúlyt fektettünk a z-transzformált fogalmára, amely egy információátviteli probléma kapcsán nyer alkalmazást.

A jegyzet nem tartalmaz bizonyításokat. Célunk a szakmai tárgyakban előforduló matematikai fogalmak és azok fontosabb tulajdonságainak összefoglalása volt. A tárgyhoz külön gyakorlatok vannak előírva, amelyekhez feladatgyűjtemény is készült. Ez az oka annak, hogy a jegyzet csak mintapéldákat tartalmaz, gyakorló feladatokat nem. A vizsgára való sikeres felkészüléshez és a tananyag jobb megértéséhez elengedhetetlennek tartjuk az előadások látogatását, ahol további példákat és egyszerűbb bizonyításokat is bemutatunk. A kihagyott bizonyítások és további alkalmazások iránt érdeklődő hallgatóknak az irodalomjegyzékben szereplő tankönyveket ajánljuk. Ismételten kifejezzük köszönetünket Hartung Ferenc kollégánknak a jegyzet megírása során nyújtott segítségéért.

Veszprém, 2011. január 31.

Győri István és Pituk Mihály

1. fejezet

Végtelen sorok

1.1. Végtelen sorok konvergenciája

Legyen $\mathbb{N}$ a nemnegatív egész számok halmaza, $\mathbb{N}^+$ pedig a pozitív egészek halmaza. A valós számok halmazát az $\mathbb{R}$, a komplex számok halmazát pedig a $\mathbb{C}$ szimbólummal jelöljük.

1.1.1. Definíció. Legyen adva egy $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ valós sorozat. A

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

végtelen összeget *végtelen sornak* nevezzük. Az

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

összeget a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor n-edik *részletösszegének* mondjuk. Ha az $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat konvergens, akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ végtelen sort is *konvergensnek* mondjuk, az

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n$$

véges határértéket pedig a *sor összegének* nevezzük, és ugyancsak a

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

szimbólummal jelöljük. Tehát

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Ha az $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat divergens, akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sort is *divergensnek* mondjuk.

Ha $a_n \geq 0$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, akkor a részletösszegek $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozata monoton növekedő. Tehát egy nemnegatív tagú sor éppen akkor konvergens, ha az $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat felülről korlátos.

Legyen $m \in \mathbb{N}^+$ és $\{b_i\}_{i=m}^{\infty}$ egy valós sorozat. A

$$\sum_{i=m}^{\infty} b_i = b_m + b_{m+1} + b_{m+2} + \dots$$

végtelen sor azonos az $\mathbb{N}$-en indexelt

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{k+m}$$

sorral, és összege:

$$\sum_{i=m}^{\infty} b_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=m}^{n} b_i,$$

feltéve, hogy a limesz létezik és véges.

1.1.2. Példa.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

1.1.3. Példa. A $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ sor divergens, mert a részletösszegek

$$s_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ 0, & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$$

sorozata divergens.

1.2. A geometriai sor

1.2.1. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $q \in \mathbb{R}$ adott. A

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$$

sort *geometriai (mértani) sornak* nevezzük. Az a szám a sor első tagja, a q szám pedig a sor *kvóciense (hányadosa)*.

A
$$\sum_{k=0}^{n} aq^k = \begin{cases} a\frac{1-q^{n+1}}{1-q}, & \text{ha } q \neq 1 \text{ és } n \in \mathbb{N}, \\ (n+1)a, & \text{ha } q = 1 \text{ és } n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$
reláció, valamint a $\{q^n\}_{n=0}^{\infty}$ geometriai sorozat konvergenciatulajdonságaiból adódik a következő:

1.2.2. Tétel (A geometriai sor konvergenciája)**.** *Legyen $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és $q \in \mathbb{R}$. A $\sum_{k=0}^{\infty} aq^k$ geometriai sor pontosan akkor konvergens, ha $|q| < 1$, és konvergencia esetén összege $\dfrac{a}{1-q}$.*

1.3. Műveletek konvergens sorokkal

1.3.1. Tétel. *Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ és $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sorok konvergensek és összegük s illetve t, α és β pedig valós számok, akkor a $\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)$ sor is konvergens, és összege $\alpha s + \beta t$, azaz*
$$\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

1.3.2. Példa. Az előző tételből és a geometriai sor konvergenciatuladonságaiból következik, hogy
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{5^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^k + \left(\frac{3}{5}\right)^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^k = \frac{5}{3} + \frac{5}{2} = \frac{25}{6}.$$

1.4. A konvergencia szükséges feltétele

1.4.1. Tétel (A konvergencia szükséges feltétele)**.** *Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor konvergens, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

1.4.2. Példa. A
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}$$
sor divergens, mert
$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{n} + 1} \longrightarrow 1 \neq 0, \qquad \text{ha } n \to \infty.$$

1.4.3. Definíció. A
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$
sort *harmonikus sornak* nevezzük.

Be fogjuk látni, hogy a harmonikus sor divergens annak ellenére, hogy $\dfrac{1}{n} \to 0$. Tehát a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ feltétel szükséges, de nem elegendő feltétele a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor konvergenciájának.

1.5. Abszolút és feltételes konvergencia

1.5.1. Definíció. A $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sort *abszolút konvergensnek* mondjuk, ha a

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

sor konvergens.

Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor konvergens, de nem abszolút konvergens, akkor *feltételesen konvergensnek* nevezzük.

A konvergens és abszolút konvergens sorok között a következő a kapcsolat.

1.5.2. Tétel. *Ha egy sor abszolút konvergens, akkor konvergens is.*

A tétel megfordítása nem igaz. Be fogjuk látni, hogy a

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$$

sor konvergens, de mivel

$$\left| (-1)^k \frac{1}{k} \right| = \frac{1}{k}, \qquad k \in \mathbb{N}^+,$$

és a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ harmonikus sor divergens, ezért a $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ sor nem abszolút konvergens. Tehát a $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ sor feltételesen konvergens.

1.6. Konvergenciakritériumok

Elegendő feltételeket adunk végtelen sorok konvergenciájára vagy divergenciájára. Megfogalmazásukhoz szükségünk van a következő fogalmakra.

1.6.1. Definíció. A $t \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ számot az $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat *torlódási pontjának* nevezzük, ha az $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatnak van olyan $\{a_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ részsorozata, amelyre

$$\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = t.$$

Be lehet bizonyítani a következő tulajdonságot.

1.6.2. Tétel. *Bármely valós $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat torlódási pontjai között $\overline{\mathbb{R}}$-ban van legnagyobb és legkisebb is.*

1.6.3. Példa. A $\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat legnagyobb torlódási pontja 1, legkisebb torlódási pontja pedig -1.

A $\{(-1)^n n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat legnagyobb torlódási pontja $+\infty$, legkisebb torlódási pontja pedig $-\infty$.

1.6.4. Definíció. Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat legnagyobb (legkisebb) torlódási pontját a sorozat *limesz szuperiorának (limesz inferiorának)* nevezzük, és a

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \qquad \left(\liminf_{n\to\infty} a_n\right)$$

szimbólummal jelöljük.

Nyilvánvaló, hogy

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Azt is be lehet látni, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ pontosan akkor létezik $\overline{\mathbb{R}}$-ban, ha

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Az ígért konvergenciakritériumok a következők:

1.6.5. Tétel (Hányadoskritérium)**.** *Tegyük fel, hogy $|a_n| > 0$ véges számú kivétellel. Ha*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1,$$

akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor abszolút konvergens.

Ha

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1,$$

akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor divergens.

Speciálisan, ha az

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

határérték (véges vagy végtelen) létezik, akkor $L < 1$ esetén a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor abszolút konvergens, $L > 1$ esetén pedig divergens.

Hangsúlyozzuk, hogy ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1,$$

akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor konvergenciatulajdonságainak meghatározására a hányadoskritérium nem használható.

1.6.6. Példa. A

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$$

sor divergens, mert

$$\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{(n)!}} = \frac{(n+1)^{(n+1)} n!}{n^n (n+1)!} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e > 1, \qquad \text{ha } n \to \infty.$$

1.6.7. Tétel (Gyökkritérium)**.** *Ha*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *sor abszolút konvergens.*

Ha

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1,$$

akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *sor divergens.*

Speciálisan, ha az

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

határérték (véges vagy végtelen) létezik, akkor $L < 1$ *esetén a* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *sor abszolút konvergens,* $L > 1$ *esetén pedig divergens.*

Ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1,$$

akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor konvergenciatulajdonságainak meghatározására a gyökkritérium nem használható.

1.6.8. Példa. A

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$$

sor konvergens, mert

$$\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1, \qquad \text{ha } n \to \infty.$$

1.6.9. Tétel (Integrálkritérium)**.** *Legyen* $f : [0,\infty) \to (0,\infty)$ *folytonos, monoton csökkenő és pozitív. Ekkor a*

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$$

sor akkor és csak akkor konvergens, ha az $\int_0^{\infty} f$ *improprius integrál konvergens.*

Az állítás igaz marad akkor is, ha a 0 számot tetszőleges $m \in \mathbb{N}^+$ számra cseréljük.

1.6.10. Példa. A

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

harmonikus sor divergens, mert

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_1^{x} \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty.$$

Ugyancsak az integrálkritérium segítségével látható be:

1.6.11. Tétel. *Ha* $\alpha > 1$, *akkor a*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$$

sor konvergens, ha pedig $\alpha \leq 1$, *akkor divergens.*

1.6.12. Definíció. A

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}, \qquad \alpha \in (0,1) \cup (1,\infty)$$

sort *hiperharmonikus sornak* nevezzük.

1.6.13. Tétel (Összehasonlító kritérium)**.** *Ha*

$$|a_k| \leq b_k \qquad \textit{véges számú kivétellel,}$$

és a $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *sor konvergens, akkor a* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *sor abszolút konvergens.*

Ha

$$a_k \geq b_k \geq 0 \qquad \textit{véges számú kivétellel,}$$

és a $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *sor divergens, akkor a* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *sor is divergens.*

Az összehasonlító kritériumból könnyen levezethető az alábbi:

1.6.14. Tétel. *Ha* $b_k > 0$ *véges számú kivétellel és valamely* $L \in (0,\infty)$ *számra*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = L,$$

akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *és* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *sorok közül vagy mindkettő konvergens, vagy pedig mindkettő divergens.*

1.6.15. Példa. A

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2}{k^2+2k+5}$$

sor divergens, mert

$$\frac{\frac{k+2}{k^2+2k+5}}{\frac{1}{k}} = \frac{k(k+2)}{k^2+2k+5} \longrightarrow 1, \qquad \text{ha } k \to \infty,$$

és a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$$

(harmonikus) sor divergens.

1.6.16. Definíció. Legyen $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ egy pozitív tagú sorozat. Ekkor a

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \qquad \text{és} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

sorokat *váltakozó előjelű soroknak* nevezzük.

Elegendő csak az első sort vizsgálni, mert a második az elsőnek -1-szerese.

A váltakozó előjelű sorok konvergenciájáról szól a következő:

1.6.17. Tétel (Leibniz-féle kritérium)**.** *Ha* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *pozitív tagú, monoton csökkenő sorozat, és* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$*, akkor a*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$$

váltakozó előjelű sor konvergens.

1.6.18. Példa. A Leibniz-kritériumból az $a_k = \dfrac{1}{k}$ $(k \in \mathbb{N}^+)$ választással kapjuk, hogy a

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k}$$

sor konvergens. Később be fogjuk látni, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k} = -\ln 2.$$

1.7. Hatványsorok

1.7.1. Definíció. Legyen adva egy $x_0 \in \mathbb{R}$ szám és egy $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ valós sorozat. A

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

függvénysort x_0 *körüli hatványsornak* nevezzük. Az x_0 szám a hatványsor *középpontja,* x pedig a valós változó.

1.7.2. Definíció. A hatványsor *konvergenciatartományán* a

$$K = \left\{ c \in \mathbb{R} \,\middle|\, \text{a} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(c-x_0)^k \text{ számsor konvergens} \right\}$$

halmazt értjük.

Nyilvánvaló, hogy $x_0 \in K$, tehát $K \neq \emptyset$. Célunk a konvergenciatartomány leírása. Ennek szempontjából alapvető fontosságú a következő:

1.7.3. Tétel (Abel-féle lemma)**.** *Ha valamely* $c \neq x_0$ *szám esetén a*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(c-x_0)^k$$

számsor konvergens, akkor minden olyan d*-re, amelyre* $|d-x_0| < |c-x_0|$ *a*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(d-x_0)^k$$

számsor abszolút konvergens.

Az Abel-féle lemmából következik az alábbi:

1.7.4. Tétel. *Legyen K a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ hatványsor konvergenciatartománya, és*

$$r = \sup\{\,|c-x_0| \mid c \in K\,\} \in [0,\infty].$$

Ha $r=0$, akkor $K=\{x_0\}$. Ha $r=+\infty$, akkor minden $c \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(c-x_0)^k$$

sor abszolút konvergens, és így $K=\mathbb{R}$. Ha pedig $r \in (0,\infty)$, akkor minden olyan c-re , amelyre $|c-x_0|<r$ ($|c-x_0|>r$) a

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(c-x_0)^k$$

sor abszolút konvergens (divergens), s ezért

$$(x_0-r,x_0+r) \subset K \subset [x_0-r,x_0+r].$$

Mivel a hatványsor konvergenciatartománya az $r=0$ esettől eltekintve intervallum, a konvergenciatartomány helyett a *konvergenciaintervallum* elnevezés is használatos.

1.7.5. Definíció. Az előző tételben szereplő r számot a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ hatványsor *konvergenciasugarának* nevezzük.

A konvergenciasugár meghatározása szolgál a következő:

1.7.6. Tétel (Cauchy–Hadamard-képlet)**.** *Legyen r a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ hatványsor konvergenciasugara, és*

$$\rho = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Ekkor

$$r = \begin{cases} 0, & \text{ha } \rho=+\infty \\ \dfrac{1}{\rho}, & \text{ha } \rho \in (0,\infty) \\ +\infty, & \text{ha } \rho = 0 \end{cases}.$$

1.7.7. Példa. A

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{k}$$

-1 körüli hatványsor konvergenciasugara $r=1$, mivel

$$\rho = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} = 1.$$

A hatványsor K konvergenciatartományára teljesül a

$$(-2,0) \subset K \subset [-2,0]$$

reláció. Mivel az $x = 0$-ra adódó

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

sor divergens (harmonikus sor), és az $x = -2$-re adódó

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$$

sor konvergens (a Leibniz-kritérium szerint), ezért

$$K = [-2,0).$$

A hatványsor konvergenciatartományának meghatározására gyakran jól használható a következő:

1.7.8. Tétel. *Legyen r a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ hatványsor konvergenciasugara. Tegyük fel, hogy $a_k \neq 0$ véges számú kivétellel, és valamely $\lambda \in [0,\infty]$ számra*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lambda.$$

Ekkor

$$r = \begin{cases} 0, & \text{ha } \lambda = +\infty \\ \frac{1}{\lambda}, & \text{ha } \lambda \in (0,\infty) \\ +\infty & \text{ha } \lambda = 0 \end{cases}.$$

1.7.9. Példa. A

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

0 körüli hatványsor konvergenciasugara $r = +\infty$, mert

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0.$$

Ezért a konvergenciatartomány $K = \mathbb{R}$.

1.8. Az összegfüggvény tulajdonságai

1.8.1. Definíció. Legyen K a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ hatványsor konvergenciatartománya. Az

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k, \qquad x \in K,$$

képlettel definiált $s : K \to \mathbb{R}$ függvényt a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ hatványsor *összegfüggvényének* mondjuk.

Az összegfüggvényt fontosabb tulajdonságait írják le a következő tételek.

1.8.2. Tétel (Az összegfüggvény folytonossága)**.** *Ha egy hatványsor konvergenciasugara pozitív, akkor a hatványsor összegfüggvénye folytonos a konvergenciaintervallumán.*

1.8.3. Tétel (Tagonkénti differenciálás)**.** *Ha* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *hatványsor* r *konvergenciasugara pozitív, akkor a hatványsor* s *összegfüggvénye akárhányszor differenciálható a konvergenciaintervallum belsejében, és* n*-edik deriváltja a hatványsor* n*-szeri tagonkénti differenciálásával kapható meg, azaz*

$$\begin{aligned}
s'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k k(x-x_0)^{k-1},\\
s''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)(x-x_0)^{k-2},\\
&\vdots\\
s^{(n)}(x) &= \sum_{k=n}^{\infty} a_k k(k-1)\dots(k-n+1)(x-x_0)^{k-n},
\end{aligned}$$

valahányszor $|x-x_0| < r$.

1.8.4. Példa. Korábban már beláttuk, hogy a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{k}$$

hatványsor konvergenciaintervalluma a $[-2,0)$ intervallum. Ezért az

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{k}, \qquad x \in [-2,0),$$

függvény differenciálható a $(-2,0)$-n, és itt

$$s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (x+1)^{k-1} = -\frac{1}{x},$$

a geometriai sor összegképlete alapján. Mivel $s(-1) = 0$, a Newton–Leibniz-szabály szerint minden $x \in (-2, 0)$ esetén

$$s(x) = s(-1) + \int_{-1}^{x} s'(t)\,dt = -\int_{-1}^{x} \frac{1}{t}\,dt = -[\,\ln|t|\,]_{-1}^{x} = -\ln|x|.$$

Az s függvény -2-ben jobbról folytonos, ezért

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} = s(-2) = \lim_{x \to -2+} s(x) = -\ln 2.$$

1.8.5. Tétel (Tagonkénti integrálás)**.** *Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ hatványsor konvergenciasugara pozitív és $[a, b]$ része a hatványsor konvergenciaintervallumának, akkor a hatványsor s összegfüggvénye tagonként integrálható $[a, b]$-n, azaz*

$$\int_a^b s(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b a_k(x - x_0)^k\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[\frac{(x - x_0)^{k+1}}{k + 1} \right]_a^b.$$

1.9. Taylor-sor, Taylor-polinom

Tegyük fel, hogy az f függvény x_0 körüli hatványsorba fejthető, azaz létezik egy $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ hatványsor úgy, hogy a hatványsor r konvergenciasugara pozitív, és

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k, \qquad \text{valahányszor } |x - x_0| < r.$$

A tagonkénti differenciálásról szóló tételből következik, hogy ekkor f akárhányszor differenciálható, és minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

(Definíció szerint $0! = 1$.) Ez a tény motiválja a következő sor bevezetését és vizsgálatát.

1.9.1. Definíció. Tegyük fel, hogy az f függvény akárhányszor differenciálható az $x_0 \in D(f)$ helyen. A

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

hatványsort az *f függvény x_0 körüli Taylor-sorának* nevezzük. A hatványsor n-edik

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

részletösszegét az *f függvény n-edik x_0 körüli Taylor-polinomjának* mondjuk. Az $x_0 = 0$ esetben használatos a *MacLaurin-sor* illetve *MacLaurin-polinom* elnevezés is.

Az

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

különbséget az *f függvény n-edik x_0 körüli maradéktagjának* mondjuk.

1.9.2. Példa. Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\exp^{(k)} = \exp$. Ezért az exp függvény 0 körüli Taylor-sora

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Korábban már beláttuk, hogy ez a hatványsor a számegyenes minden pontjában abszolút konvergens.

1.10. Taylor tétele

Taylor tételének megfogalmazásához szükségünk van a következő jelölésre.

1.10.1. Definíció. Bármely $x_0, x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$ esetén

$$[x_0; x] = \begin{cases} [x_0, x], & \text{ha } x_0 < x \\ [x, x_0], & \text{ha } x < x_0. \end{cases}$$

Hasonlóképpen definiáljuk az $(x_0; x)$ nyílt intervallumot.

1.10.2. Tétel (Taylor tétele). *Legyen x_0, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$. Ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén $f^{(n)}$ folytonos az $[x_0; x]$ intervallumon és differenciálható az $(x_0; x)$-en, akkor létezik $c \in (x_0; x)$ úgy, hogy*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Megjegyezzük, hogy az $n = 0$ esetben Taylor tétele Lagrange tételébe megy át.

1.10.3. Definíció. Az $R_n(x)$ maradéktagnak Taylor tételében szereplő alakját a *maradéktag Lagrange-féle alakjának* nevezzük.

Taylor tétele gyakran jól használható függvényértékek közelítő számítására.

1.10.4. Definíció. Bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén az exp függvény 0 körüli n-edik Taylor polinomja

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Ezért ha az $e = \exp 1$ szám értékét a Taylor-polinom

$$T_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

értékével helyettesítjük, akkor Taylor tétele szerint létezik $c \in (0, 1)$ úgy, hogy az $e = \exp 1$ pontos értéke és a „közelítő” $T_n(1)$ érték közötti különbség az

$$\exp(1) - T_n(1) = R_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!}$$

alakban írható. Mivel $c < 1$, ezért

$$\frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Ezért ha azt szeretnénk, hogy a valódi és a közelítő érték közötti távolság kisebb legyen 10^{-2}-nál, akkor az n számot elegendő úgy választani, hogy

$$\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{100},$$

vagyis 4-nél nagyobbnak. Tehát

$$T_5(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = 2,71\bar{6}$$

már 10^{-2} pontossággal közelíti az e számot.

1.11. Nevezetes hatványsorok

Taylor tétele jól használható arra is, hogy bizonyos függvényeket hatványsorba fejtsünk. Taylor tételének egyik következménye:

1.11.1. Tétel. *Legyen $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy f akárhányszor differenciálható (a,b)-n és létezik $M \in (0,\infty)$ úgy, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re $|f^{(n)}| \le M$ az (a,b)-n. Ekkor bármely x, $x_0 \in (a,b)$ esetén*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Az előző tételből könnyen megkapható néhány nevezetes hatványsor.

1.11.2. Tétel (Az exp függvény hatványsora)**.** *Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

1.11.3. Tétel (A sin függvény hatványsora)**.** *Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

1.11.4. Tétel (A cos függvény hatványsora)**.** *Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

1.12. Komplex hatványsorok

Komplex sorozatok és sorok konvergenciájának, valamint a komplex hatványsorok konvergenciatartományának a definícióját úgy kapjuk, hogy a valós sorozatok, sorok, illetve hatványsorok megfelelő definíciójában $\mathbb{R}$-et $\mathbb{C}$-re cseréljük. A sorozatok határértékszámításának szabályai és a sorok konvergenciakritériumai a monotonitási és rendezési relációkra hivatkozókat leszámítva átvihetők a komplex esetre is. Hasonló a helyzet a komplex hatványsorok konvergenciatartományával is. Ha $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ komplex számok sorozata és $z_0 \in \mathbb{C}$, akkor a

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$$

komplex változójú hatványsor konvergenciatartományát hasonlóképpen jellemezhetjük, mint a valós hatványsorokét. Pontosabban, ha

$$\rho = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|},$$

akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ hatványsor konvergenciasugara

$$r = \begin{cases} 0, & \text{ha } \rho = +\infty \\ \dfrac{1}{\rho}, & \text{ha } \rho \in (0,\infty) \\ +\infty & \text{ha } \rho = 0 \end{cases},$$

azaz ha $|z-z| < r$, akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ sor abszolút konvergens, ha pedig $|z-z_0| > r$, akkor divergens.

Az exp, sin és cos függvények hatványsor alakjáról szóló eredmények lehetőséget adnak ezen függvények komplex számokra való kiterjesztésére.

1.12.1. Definíció. Bármely $z \in \mathbb{C}$ esetén legyen

$$\exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

A valós exp függvényhez hasonlóan $z \in \mathbb{C}$ esetén is használatos az $\exp z = e^z$ jelölés.

Végül ismertetünk három a komplex exp, sin és cos függvényekre vonatkozó nevezetes azonosságot.

1.12.2. Tétel (Euler-formulák). *Bármely $z \in \mathbb{C}$ helyen*

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Az első Euler-formulát a komplex szám trigonometrikus alakjával kombinálva kapjuk a $z \neq 0$ komplex szám *exponenciális alakját:*

$$z = re^{i\varphi},$$

ahol $r = |z|$, φ pedig z argumentuma.

2. fejezet

Egy információátviteli probléma

2.1. Jelsorozatok átvitele

Legyen adva egy üzenetátviteli rendszer, amelyben az üzeneteket két alapjel – mondjuk a és b – segítségével kódoljuk és továbbítjuk. Egy üzenet formája az a és b alapjelekből álló valamely véges hosszúságú sorozat, például: $abaabbb$. Ilyen rendszer a telegráf vagy a binárisan kódolt adatátviteli rendszerek (fax, internet, stb.).

A rendszerben az a alapjel átviteléhez k_1, míg a b alapjel átviteléhez k_2 időegységre van szükség (k_1 és k_2 pozitív egész). Tegyük fel a határozottság kedvéért, hogy $k_2 \geq k_1$. Felmerül a kérdés: hány olyan egymástól különböző üzenet (jelsorozat) van, amelyek átviteléhez pontosan n időegység kell?

Jelölje s_n mindazon egymástól különböző üzeneteknek a számát, amelyek pontosan n időegység alatt vihetők át. Ekkor s_n teljesíti a

$$s_n = s_{n-k_1} + s_{n-k_2}, \qquad n \geq k_2 + 1$$

rekurzív összefüggést, hiszen csak két különböző eset fordulhat elő: ha az utolsó átvitt alapjel k_1 hosszú volt, akkor előtte összesen s_{n-k_1} db különböző $n - k_1$ hosszú jelsorozat lehetett, ha pedig az utolsó átvitt alapjel k_2 hosszú volt, akkor előtte összesen s_{n-k_2}-féle $n - k_2$ hosszú jelsorozat lehetett. Ez a rekurzív képlet akkor határozza meg egyértelműen az $\{s_n\}$ sorozatot, ha megadjuk a sorozat első k_2 db kezdeti értékét:

$$s_1 = u_1,\ s_2 = u_2,\ \ldots,\ s_{k_2} = u_{k_2}.$$

Speciális eset: Legyen az $a = \cdot$ jel átviteléhez szükséges idő egy egység, azaz $k_1 = 1$, és a $b = -$ jel átviteléhez szükséges idő két egység, azaz $k_2 = 2$. A szemléltetés kedvéért táblázatba foglaltuk az $\{s_n\}$ sorozat első néhány tagját és a hozzájuk tartozó jelsorozatokat:

n	s_n	lehetséges jelsorozatok
1	1	$\cdot$
2	2	$\cdot\cdot;\quad -$
3	3	$\cdot\cdot\cdot;\quad \cdot-;\quad -\cdot$
4	5	$\cdot\cdot\cdot\cdot;\quad \cdot\cdot-;\quad \cdot-\cdot;\quad -\cdot\cdot;\quad --$

Az $\{s_n\}$ sorozatot ebben az esetben az

$$\begin{aligned} s_n &= s_{n-1} + s_{n-2}, \qquad n \geq 3, \\ s_1 &= 1, \qquad s_2 = 2, \end{aligned}$$

rekurzió határozza meg.

Az információelméletben az áteresztő csatorna kapacitását, jele C, a

$$C = \lim_{n \to +\infty} \frac{\log_2 s_n}{n}$$

formulával definiálják [3].
Felmerülnek a következő kérdések:

- Mi lehet s_n képlete?
- Hogyan számolható ki az áteresztő csatorna C kapacitása, és hogyan változik C k_1 és k_2 függvényében?

A kérdéseket a következő részben bevezetett z-transzformált segítségével fogjuk megválaszolni.

2.2. A z-transzformált fogalma

2.2.1. Definíció. Legyen adva egy komplex számokból álló $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat. Az $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat *z-transzformáltját* az

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{z^n}$$

képlettel definiáljuk minden olyan $z \in \mathbb{C}$-re, amelyre a jobb oldalon szereplő komplex számsor konvergens. Jelölés: $X = Z\{x_n\}$.

Az $X = Z\{x_n\}$ függvény (ha létezik) komplex változójú és komplex értékű. Ha $w = \dfrac{1}{z}$, akkor

$$X(1/w) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n w^n$$

egy komplex hatványsor, tehát a z-transzformált vizsgálata során felhasználhatjuk a komplex hatványsorokra vonatkozó eredményeinket. Eszerint ha

$$R = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|x_n|},$$

akkor $|z| > R$ esetén a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{z^n}$$

sor konvergens, $|z| < R$ esetén pedig divergens.

2.2.2. Definíció. Az

$$R = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|}, \qquad 0 \le R \le \infty,$$

számot az $X = Z\{x_n\}$ z-transzformált *konvergenciasugarának* nevezzük.

2.2.3. Tétel (Egzisztencia tétel)**.** *Legyen adva egy $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ komplex sorozat. Ha az $X = Z\{x_n\}$ z-transzformált R konvergenciasugara véges, akkor X értelmezve van minden olyan $z \in \mathbb{C}$ helyen, amelyre $|z| > R$.*

2.2.4. Tétel (Unicitás tétel)**.** *Legyen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ és $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ két komplex sorozat. Tegyük fel, hogy az $X = Z\{x_n\}$ és $Y = Z\{y_n\}$ z-transzformáltak konvergenciasugarai végesek, továbbá*

$$X(z) = Y(z), \qquad \textit{ha } |z| \textit{ elég nagy.}$$

Ekkor $x_n = y_n$ minden $n \in \mathbb{N}$-re.

2.3. A z-transzformált tulajdonságai

2.3.1. Tétel (Linearitás)**.** *Legyen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ és $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ két komplex sorozat. Tegyük fel, hogy a $Z\{x_n\}$ és $Z\{y_n\}$ z-transzformáltak konvergenciasugarai végesek, és $a, b \in \mathbb{C}$. Ekkor*

$$Z\{ax_n + by_n\}(z) = aZ\{x_n\}(z) + bZ\{y_n\}(z), \qquad \textit{ha } |z| \textit{ elég nagy.}$$

2.3.2. Tétel (Eltolás)**.** *Legyen adva egy $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ komplex sorozat. Ha az $X = Z\{x_n\}$ z-transzformált R konvergenciasugara véges, akkor bármely $k \in \mathbb{N}^+$ esetén*

$$Z\{x_{n+k}\}(z) = z^k X(z) - \sum_{j=0}^{k-1} x_j z^{j-k}, \qquad \textit{ha } |z| > R.$$

2.3.3. Tétel (Konvolúciós tétel)**.** *Legyen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ és $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ két komplex sorozat, és definiáljuk az $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatot az*

$$u_n = \sum_{j=0}^{n} x_{n-j}\, y_j, \qquad \textit{ha } n \in \mathbb{N}$$

képlettel. Ha az $X = Z\{x_n\}$ és $Y = Z\{y_n\}$ z-transzformált R_1, illetve R_2 konvergenciasugarai végesek, akkor az $U = Z\{u_n\}$ z-transzformált konvergenciasugara is véges, és

$$U(z) = X(z)Y(z), \qquad \textit{ha } |z| \textit{ elég nagy.}$$

2.3.4. Definíció. Az előző tételben szereplő $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatot az $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ és $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat *konvolúciójának* nevezzük.

Néhány konkrét sorozat z-transzformáltját a következő táblázat tartalmazza:

x_n	$X(z) = Z\{x_n\}(z)$
1	$\dfrac{z}{z-1}$
a^n	$\dfrac{z}{z-a}$
na^n	$\dfrac{az}{(z-a)^2}$
n^2a^n	$\dfrac{az(z+a)}{(z-a)^3}$
n^3a^n	$\dfrac{az(z^2+4az+a^2)}{(z-a)^4}$
n^ka^n	$(-1)^kD^k\left(\dfrac{z}{z-a}\right); \quad D = z\dfrac{d}{dz}$
$a^n \sin(n\omega)$	$\dfrac{az\sin(n\omega)}{z^2-2az\cos\omega+a^2}$
$a^n \cos(n\omega)$	$\dfrac{z(z-a\cos\omega)}{z^2-2az\cos\omega+a^2}$

($a, b, \omega \in \mathbb{R}$ és $k \in \mathbb{N}^+$)

A továbbiakban szükségünk lesz a következő tételre:

2.3.5. Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$, és $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ egy komplex sorozat. Tegyük fel, hogy $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ olyan komplex sorozat, amelyre*

$$x_{n+k} = a_1x_{n+k-1} + a_2x_{n+k-2} + \cdots + a_kx_n + b_n, \qquad \text{ha } n \in \mathbb{N},$$

továbbá

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} < \infty.$$

Ekkor

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < \infty.$$

2.4. A jelátviteli probléma vizsgálata

Tekintsük a 2.1. szakaszban definiált információátviteli probléma

$$\begin{aligned} s_n &= s_{n-1} + s_{n-2}, \qquad \text{ha } n \geq 3, \\ s_1 &= 1, \qquad s_2 = 2, \end{aligned}$$

speciális esetét. A problémát írhatjuk az ekvivalens

$$\begin{aligned} s_{n+2} &= s_{n+1} + s_n, \qquad \text{ha } n \geq 0, \\ s_0 &= 1, \qquad s_1 = 1, \end{aligned}$$

alakban is. Legyen $S = Z\{s_n\}$. Ha vesszük mindkét oldal z-transzformáltját és alkalmazzuk az eltolási tételt, azt kapjuk, hogy

$$z^2 S(z) - z^2 s_0 - z s_1 = z S(z) - z s_0 + S(z).$$

A kezdeti értékeket behelyettesítésével:

$$(z^2 - z - 1) S(z) = z^2,$$

azaz

$$S(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1}.$$

Bontsuk $S(z)$-t parciális törtekre úgy, hogy egy z szorzótényezőt meghagyunk a számlálóban:

$$\frac{z^2}{z^2 - z - 1} = \frac{z^2}{(z - z_1)(z - z_2)} = z\left(\frac{A}{z - z_1} + \frac{B}{z - z_2}\right),$$

ahol

$$z_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad z_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Ezt végigszámolva azt kapjuk, hogy

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} z_1 \qquad \text{és} \qquad B = -\frac{1}{\sqrt{5}} z_2,$$

tehát

$$S(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} z_1 \frac{z}{z - z_1} - \frac{1}{\sqrt{5}} z_2 \frac{z}{z - z_2}.$$

Innen

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

minden $n \in \mathbb{N}^+$-re. Ha erre a sorozatra kiszámítjuk a csatorna áteresztő képességét, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
C &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\log_2 s_n}{n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\log_2\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]}{n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\log_2\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\left(1-\left(\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)^{n+1}\right)\right]}{n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\log_2\frac{1}{\sqrt{5}} + \log_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \log_2\left(1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right)}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2\frac{1}{\sqrt{5}}}{n} + \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\log_2\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{n} + \lim_{n\to+\infty} \frac{\log_2\left(1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right)}{n} \\
&= 0 + \log_2\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 0.
\end{aligned}$$

Tehát

$$C = \log_2\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,7.$$

3. fejezet

Többváltozós függvények differenciálszámítása

3.1. Az p-dimenziós euklideszi tér

Bármely $p \in \mathbb{N}^+$ esetén az $\mathbb{R}^p$ szimbólum a p-dimenziós valós oszlopvektorok terét jelöli. $\mathbb{R}^p$ elemeit *vektoroknak* vagy *pontoknak* nevezzük; $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$.

Bármely $x = (x_1, \dots, x_p)^T$, $y = (y_1, \dots, y_p)^T \in \mathbb{R}^p$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p)^T,$$
$$\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)^T,$$

ahol a T felső index a vektorok transzponálására utal, azaz sorvektorok helyett oszlopvektorokat kell írunk. A fenti két művelettel együtt $\mathbb{R}^p$ valós vektortér, amelynek dimenziója p. Az $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)^T, \dots e_p = (0, 0, \dots, 1)^T$ vektorok az $\mathbb{R}^p$ tér bázisát alkotják. Ezeket a vektorokat *kanonikus bázisvektoroknak* nevezzük. Bármely $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)^T \in \mathbb{R}^p$ vektor esetén

$$x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i.$$

Az $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)^T \in \mathbb{R}^p$ vektor *hosszát* vagy *euklideszi normáját* a

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{p} x_i^2 \right)^{1/2}$$

képlettel definiáljuk.

Az x és $y \in \mathbb{R}^p$ pontok egymástól való *euklideszi távolsága*

$$\rho_p(x, y) = \|x - y\|.$$

3.2. Pontsorozat konvergenciája

3.2.1. Definíció. Legyen $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ adott $\mathbb{R}^p$-beli sorozat. Azt mondjuk, hogy az $\{a_n\}$ pontsorozat az $a \in \mathbb{R}^p$ *limeszponthoz* tart, ha $\|a_n - a\| \to 0$, ha $n \to \infty$. A jelölés a szokásos:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \text{illetve} \qquad a_n \to a.$$

Az $\{a_n\}$ pontsorozat *konvergens,* ha van limeszpontja, különben *divergens*.

A következő egyszerű tétel a pontsorozatok konvergenciáját visszavezeti valós számsorozatok konvergenciájára.

3.2.2. Tétel. *Legyen* $a_n = (a_{n1}, \dots, a_{np})^T$*,* $n \in \mathbb{N}$*, és* $a = (a_1, \dots, a_p)^T \in \mathbb{R}^p$*. Az*

$$a_n \to a$$

limeszreláció pontosan akkor teljesül, ha minden $i \in \{1, \dots, p\}$ *esetén*

$$a_{ni} \to a_i.$$

3.3. Környezetek, pontozott környezetek

3.3.1. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}^p$ és $\epsilon > 0$. Az a pont ϵ sugarú környezetén a

$$K_\epsilon(a) = \{\, x \in \mathbb{R}^p \mid \|x - a\| < \epsilon \,\}$$

halmazt értjük. A

$$P_\epsilon(a) = K_\epsilon(a) \setminus \{a\}$$

halmazt a pont ϵ sugarú *pontozott környezetének* mondjuk.

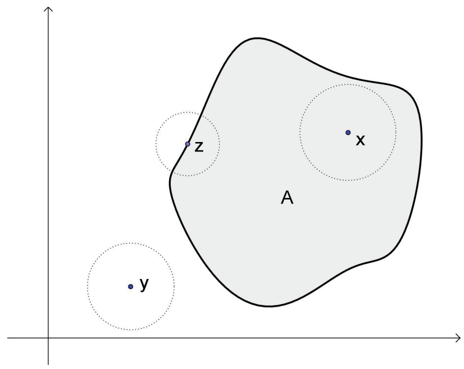
A $p = 1$ esetben $K_\epsilon(a)$ átmegy az $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ intervallumba, $p = 2$ esetén az $a \in \mathbb{R}^2$ középpontú ϵ sugarú körbe (a körvonal nélkül), $p = 3$ esetén pedig az $a \in \mathbb{R}^3$ középpontú ϵ sugarú gömbbe (a gömbfelület nélkül).

3.4. Nyílt, zárt és korlátos ponthalmazok

A következő definíció egy $x \in \mathbb{R}^p$ pontnak egy $A \subset \mathbb{R}^p$ ponthalmazhoz viszonyított helyzetét osztályozza.

3.4.1. Definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}^p$ és $A \subset \mathbb{R}^p$. Azt mondjuk, hogy x *belső pontja* A-nak, ha van olyan $\epsilon > 0$, hogy $K_\epsilon(x) \subset A$; x *külső pontja* A-nak, ha van olyan $\epsilon > 0$, hogy $A \cap K_\epsilon(x) = \emptyset$; x *határpontja* A-nak, ha minden $\epsilon > 0$-ra $K_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset \neq K_\epsilon(x) \setminus A$.

A következő ábrán látható $A \subset \mathbb{R}^2$ halmaznak x belső pontja, y külső pontja, z pedig határpontja.



3.1. ábra.

3.4.2. Definíció. Az $A \subset \mathbb{R}^p$ ponthalmazt *nyíltnak* mondjuk, ha minden $x \in A$ pont belső pontja A-nak, és *zártnak,* ha az $\mathbb{R}^p \setminus A$ ponthalmaz nyílt.

Az $A \subset \mathbb{R}^p$ halmaz összes belső pontjából álló halmazt A *belsejének* nevezzük és int A-val jelöljük. Az A halmaz határpontjaiból álló halmaz neve A *határa.*

Az int A jelölés az „interior” latin szóból ered, amelynek jelentése „belső”.

Egy ponthalmaz zártságának ellenőrzésére gyakran jól használható a következő tétel:

3.4.3. Tétel. *Egy $A \subset \mathbb{R}^p$ ponthalmaz akkor és csak akkor zárt, ha bármely A-beli konvergens pontsorozat limeszpontja eleme A-nak, azaz ha $a_n \in A$ minden $n \in \mathbb{N}$-re és valamely $a \in \mathbb{R}^p$ esetén $a_n \to a$, akkor $a \in A$.*

3.4.4. Példa. Ha $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, f, g pedig az $[\alpha, \beta]$ intervallumon folytonos valós függvények, amelyekre $g \leq f$ az $[\alpha, \beta]$-n, akkor az

$$A = \{\, (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \leq x \leq \beta,\ g(x) \leq y \leq f(x) \,\} \subset \mathbb{R}^2$$

halmaz zárt. Valóban, ha $(x_n, y_n)^T \in A$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, azaz

$$\alpha \leq x_n \leq \beta, \qquad g(x_n) \leq y_n \leq f(x_n), \qquad n \in \mathbb{N},$$

és valamely $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ estén $(x_n, y_n)^T \to (x, y)^T$, akkor $x_n \to x$ és $y_n \to y$, és felhasználva f és g folytonosságát az előző egyenlőtlenségrendszerből határátmenet után azt kapjuk, hogy

$$\alpha \leq x \leq \beta, \qquad g(x) \leq y \leq f(x).$$

Tehát $(x, y)^T \in A$.

3.4.5. Definíció. Az $A \subset \mathbb{R}^p$ ponthalmazt *korlátosnak* nevezzük, ha létezik $r \in (0, \infty)$ úgy, hogy $A \subset K_r(0)$.

3.4.6. Definíció. Az $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ $\mathbb{R}^p$-beli pontsorozat *korlátos,* ha az $A = \{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ halmaz korlátos.

A számsorozatok elméletéből ismert kiválasztási tétel átvihető pontsorozatokra is.

3.4.7. Tétel (Bolzano–Weierstrass-tétel)**.** *$\mathbb{R}^p$-ben minden korlátos pontsorozatnak van konvergens részsorozata.*

3.5. Többváltozós függvények

3.5.1. Definíció. Legyen $p, q \in \mathbb{N}^+$. Az f függvény $\mathbb{R}^q$-ba vezető p *változós,* ha $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, azaz $D(f) \subset \mathbb{R}^p$. Ha $q > 1$, akkor f-et *vektorfüggvénynek,* $q = 1$ esetén pedig *valós függvénynek* nevezzük.

Rögzített $k \in \{1, \dots, q\}$ esetén minden $x \in D(f)$-hez rendeljük hozzá az $f(x) \in \mathbb{R}^q$ képpont k-adik koordinátáját. Így egy $f_k : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ p változós valós függvény keletkezik, amelyet f k-adik *koordinátafüggvényének* nevezzük.

A koordinátafüggvények ismeretében f egyértelműen meg van határozva, hiszen

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_q(x))^T, \qquad \text{ha } x \in D(f).$$

Az $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ típusú többváltozós függvények fontos osztályát a lineáris leképezések alkotják. Az $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ leképezés *lineáris,* ha $D(L) = \mathbb{R}^p$, továbbá minden $x, y \in \mathbb{R}^p$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$L(x + y) = L(x) + L(y),$$
$$L(\lambda x) = \lambda L(x).$$

A lineáris algebrából ismert, hogy bármely $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ lineáris leképezés az

$$L(x) = M_L \cdot x, \qquad x \in \mathbb{R}^p,$$

alakban írható, ahol M_L $q \times p$ típusú valós mátrix. Az M_L mátrixot az L leképezés (kanonikus bázisokra vonatkozó) *mátrixának* nevezzük.

3.6. Határérték és folytonosság

Az egyváltozós valós függvények határértékének és folytonosságának definícióját lemásolva kapjuk a többváltozós függvények határértékének, illetve folytonosságának definícióját.

3.6.1. Definíció. Legyen $p, q \in \mathbb{N}^+$. Azt mondjuk, hogy a $b \in \mathbb{R}^q$ pont az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvény *határértéke* az $a \in \mathbb{R}^p$ pontban, ha f értelmezve van a valamely pontozott környezetében, és bármely olyan $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ sorozatra, amelyre $x_n \in D(f)$, $x_n \neq a$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, és $x_n \to a$, a függvényértékek $\{f(x_n)\}_{n=0}^\infty$ sorozata b-hez tart. Jelölés: $f(x) \to b$, ha $x \to b$ vagy $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

3.6.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvény folytonos az $a \in D(f)$ pontban, ha

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

azaz ha f értelmezve van a valamely környezetében, és bármely olyan $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ sorozatra, amelyre $x_n \in D(f)$ és $x_n \to a$, a függvényértékek $\{f(x_n)\}_{n=0}^\infty$ sorozata $f(a)$-hoz tart.

Most a folytonosságnál általánosabb, az értelmezési tartomány valamely részhalmazára szorítkozva vett folytonosság fogalmát definiáljuk.

3.6.3. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, és $a \in A \subset D(f)$. Azt mondjuk, hogy f *A-ra szorítkozva folytonos az a pontban,* ha bármely olyan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatra, amelyre $x_n \in A$ és $x_n \to a$, a függvényértékek $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ sorozata $f(a)$-hoz tart.

Ha f egyváltozós valós függvény ($p = q = 1$) és valamely $a \in D(f)$ és $\delta > 0$ esetén $[a, a+\delta) \subset D(f)$ ($(a-\delta, a] \subset D(f)$), akkor f-nek az $[a, a+\delta)$ ($(a-\delta, a]$) halmazra szorítkozva vett folytonossága azt jelenti, hogy f az a helyen jobbról (balról) folytonos.

A következő tétel azt mutatja, hogy egy vektorfüggvény határértékének és folytonosságának vizsgálata során elegendő a koordinátafüggvényeire szorítkozni.

3.6.4. Tétel. *Legyen p, $q \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ adott függvény, $x \in D(f)$ esetén*

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_q(x))^T,$$

továbbá $a \in A \subset D(f)$ és $b = (b_1, \dots, b_q)^T \in \mathbb{R}^q$. Ekkor

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

pontosan akkor, ha minden $k \in \{1, \dots, q\}$ esetén

$$\lim_{x \to a} f_k(x) = b_k.$$

Az f függvény éppen akkor folytonos (A-ra szorítkozva) az a pontban, ha minden $k \in \{1, \dots, q\}$ esetén f_k (A-ra szorítkozva) folytonos az a helyen.

Ha $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ és $x = (x_1, \dots, x_p)^T \in D(f)$, akkor

$$f((x_1, \dots, x_p)^T)$$

helyett a kényelmesebb

$$f(x_1, \dots, x_p)$$

jelölést fogjuk használni. Igazodva az általános szokáshoz az $(x_1, \dots, x_p)^T \in \mathbb{R}^p$ jelölést is úgy „egyszerűsítjük”, hogy a transzponálásra utaló T felső indexet elhagyjuk, azaz oszlopvektor helyett sorvektort írunk. Ugyanakkor hangsúlyozzuk, hogy ha valamely $\mathbb{R}^p$-beli vektor mátrix szorzat tényezőjeként szerepel, akkor mindig oszlopvektorként kell értenünk.

3.6.5. Példa. Az

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

függvénynek a $(0, 0)$ pontban nem létezik határértéke, mert ha olyan (x_n, y_n) pontsorozatot tekintünk, amelynek tagjai mind az $y = x$ egyenesen fekszenek és a $(0, 0)$ ponthoz tartanak, akkor $0 \neq x_n$ esetén

$$f(x_n, x_n) = \frac{x_n^2}{x_n^2 + x_n^2} = \frac{1}{2},$$

ugyanakkor az x-tengely mentén $y_n = 0$ folytán

$$f(x_n, 0) = 0$$

adódik.

3.6.6. Példa. Az
$$f(x,y) = \sin(2x + y^2), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$
függvény folytonos minden $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pontban, mert bármely (a,b)-hez tartó (x_n, y_n) sorozatra $x_n \to a$, $y_n \to b$, és ezért
$$f(x_n, y_n) = \sin(2x_n + y_n^2) \to \sin(2a + b^2) = f(a,b).$$

Az egyváltozós valós függvények határértékéről és folytonosságáról szóló tételek többsége átvihető többváltozós valós függvényekre is. Így például, ha f, $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ folytonosak az $a \in \mathbb{R}^p$ pontban, akkor ugyanilyen $f + g$, fg is, és $g(a) \neq 0$ esetén ugyanilyen $\dfrac{f}{g}$ is.

Az egyváltozós valós függvények intervallumon való folytonosságának definíciója speciális esete a következő fogalomnak.

3.6.7. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ és $A \subset D(f)$. Azt mondjuk, hogy f *folytonos az* A *halmazon,* ha f minden $a \in A$ pontban A-ra szorítkozva folytonos.

Ha $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ és $U \subset D(f)$ nyílt halmaz, akkor f pontosan akkor folytonos az U halmazon, ha folytonos U minden pontjában.

3.7. Differenciálhatóság

Az egyváltozós valós függvények elméletéből ismert differenciálhatóság fogalmának kiterjesztése többváltozós függvényekre a következő:

3.7.1. Definíció. Az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvényt *(totálisan) differenciálhatónak* mondjuk az $a \in D(f)$ pontban, ha létezik egy $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ lineáris leképezés úgy, hogy
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x - a\|} = 0.$$

Az L lineáris leképezést az f függvény a pontbeli *differenciáljának,* az L leképezés M_L mátrixát pedig f a-beli *differenciálhányadosának vagy Jacobi-mátrixának* nevezzük. Jelölés: $L = Df(a)$, illetve $M_L = f'(a)$.

Valós f esetén ($q = 1$) az $f'(a)$ Jacobi-mátrix $1 \times p$ típusú, azaz p dimenziós sorvektor. Ebben az esetben az a pontbeli Jacobi-mátrix helyett az a pontbeli *gradiens* vagy *gradiensvektor* elnevezés és az $f'(a) = \operatorname{grad} f(a)$ jelölés is használatos.

Meg lehet mutatni, hogy ha létezik, akkor a differenciál egyértelmű.

3.7.2. Tétel. *Bármely $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvénynek egy adott $a \in D(f)$ pontban legfeljebb egy differenciálja létezik.*

Egy vektorfüggvény differenciálhatósága ekvivalens a koordinátafüggvényeinek differenciálhatóságával.

3.7.3. Tétel. *Legyen p, $q \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ adott függvény, $x \in D(f)$ esetén*

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_q(x))^T,$$

továbbá $a \in D(f)$. Az f függvény éppen akkor differenciálható az a pontban, ha minden $k \in \{1, \dots, q\}$ esetén az $f_k : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az a pontban, és differenciálhatóság esetén az $f'(a)$ Jacobi-mátrix k-adik sorvektora $f'_k(a)$, $k \in \{1, \dots, q\}$.

A differenciálhatóság és a folytonosság közötti kapcsolat hasonló, mint az egyváltozós valós függvényeknél.

3.7.4. Tétel. *Ha $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ differenciálható az $a \in D(f)$ pontban, akkor itt folytonos is.*

Arra, hogy a fordított állítás nem igaz már az egyváltozós valós függvényeknél is utaltunk.

3.8. Az irány menti derivált, parciális deriváltak

Ha a, $v \in \mathbb{R}^p$, akkor az a ponton áthaladó v irányvektorú *egyenes* pontjai az

$$x = a + tv$$

alakban írhatók, ahol $t \in \mathbb{R}$. Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $t > 0$ és tegyük fel, hogy $v \in \mathbb{R}^p$ *egységvektor,* azaz $\|v\| = 1$. Tekintsük f értékét abban a pontban, amely a-tól t távolságra fekszik a v által megadott irányban, vagyis az $a+tv$ pontban. Ennek és $f(a)$-nak a különbségét a két pont t távolságával osztva az

$$\frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

v irány menti különbségi hányados keletkezik.

3.8.1. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $a \in D(f)$ és $v \in \mathbb{R}^p$ adott egységvektor. Azt mondjuk, hogy f *differenciálható az a pontban a v irány mentén,* ha a

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

határérték létezik ($\mathbb{R}^q$-ban). Ezt a határértéket (ha létezik) a $\partial_{(v)} f(a)$ vagy $D_{(v)} f(a)$ szimbólummal jelöljük, és az *f függvény a-beli v irány menti differenciálhányadosának* nevezzük.

A definícióból következik:

3.8.2. Tétel. *Legyen p, $q \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvény, $x \in D(f)$ esetén*

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_q(x))^T,$$

továbbá $a \in D(f)$ és $v \in \mathbb{R}^p$ egy adott egységvektor. Az f függvény éppen akkor differenciálható az a pontban a v irány mentén, ha minden $k \in \{1, \dots, q\}$ esetén f_k differenciálható a v irány mentén, és differenciálhatóság esetén

$$\partial_{(v)} f(a) = (\partial_{(v)} f_1(a), \dots, \partial_{(v)} f_q(a))^T.$$

Abban a speciális esetben, amikor v megegyezik a kanonikus bázisvektorok valamelyikével az irány menti differenciálhányadost parciális differenciálhányadosnak nevezzük. Részletesebben:

3.8.3. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $a \in D(f)$, $i \in \{1, \dots p\}$ és $e_i \in \mathbb{R}^p$ az i-edik kanonikus bázisvektor. Azt mondjuk, hogy f *parciálisan differenciálható az* a *pontban az* i*-edik változó szerint,* ha f differenciálható a-ban az e_i irány mentén. A $\partial_{(e_i)} f(a) \in \mathbb{R}^q$ irány menti differenciálhányadost (ha létezik) az f *függvény* a*-beli* i*-edik változó szerinti parciális differenciálhányadosának* nevezzük.

3.8.4. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvény és $i \in \{1, \dots, p\}$. Jelöljük $\partial_i f$-fel azt a függvényt, amelynek értelmezési tartománya $D(f)$ azon x pontjaiból áll, amelyekben f az i-edik változó szerint parciálisan differenciálható, és értéke minden ilyen x pontban f-nek az i-edik változó szerinti parciális differenciálhányadosa. A $\partial_i f$ függvényt az f függvény i*-edik változó szerinti parciális deriváltfüggvényének* vagy röviden *parciális deriváltjának* nevezzük.

Ha az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvény i-edik változóját x_i-vel jelöljük, akkor az i-edik változó szerinti parciális deriváltat a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad f'_{x_i}, \qquad \text{vagy} \qquad f_{x_i}$$

szimólumokkal is jelölhetjük.

Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ p változós valós függvény, $a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ és $i \in \{1, \dots, p\}$. Definiáljuk a $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt a

$$h(s) = f(a_1, \dots a_{i-1}, s, a_{i+1}, \dots, a_p)$$

képlettel minden olyan $s \in \mathbb{R}$-re, amelyre $(a_1, \dots a_{i-1}, s, a_{i+1}, \dots, a_p) \in D(f)$. Könnyű belátni, hogy f pontosan akkor differenciálható a-ban az i-edik változó szerint, ha h differenciálható az $a_i \in \mathbb{R}$ helyen, és ekkor

$$\partial_i f(a) = h'(a_i).$$

Ezért a parciális deriváltak kiszámításához használhatjuk az egyváltozós valós függvények differenciálási szabályait. A kétváltozós esetben ($p = 2$) a fenti h függvényt a következő ábrák szemléltetik:

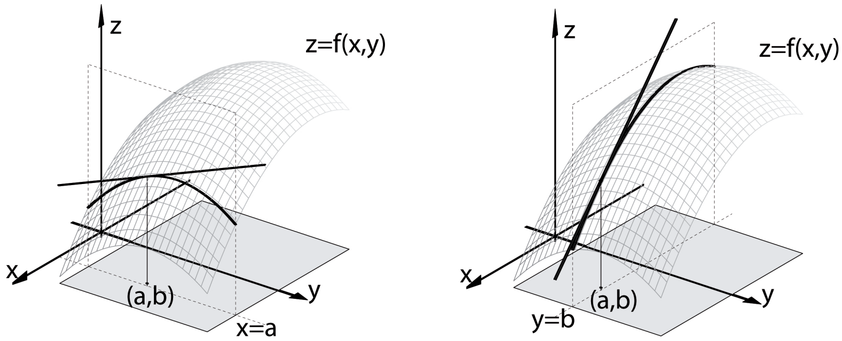
3.8.5. Példa. Legyen

$$f(x, y) = x^y, \qquad \text{ha } x \in (0, \infty) \text{ és } y \in \mathbb{R}.$$

Ekkor minden $x \in (0, \infty)$ és $y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \ln x.$$

A differenciálhatóság és az irány menti derivált közötti kapcsolatról szól a következő:



3.2. ábra.

3.8.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ differenciálható az $a \in D(f)$ pontban. Ekkor bármely $v \in \mathbb{R}^p$ egységvektor esetén a $\partial_{(v)} f(a)$ irány menti derivált létezik, mégpedig*

$$\partial_{(v)} f(a) = f'(a) \cdot v.$$

Speciálisan, minden $i \in \{1, \ldots, p\}$ esetén f az a pontban parciálisan differenciálható az i-edik változó szerint, és

$$\partial_i f(a) = f'(a) \cdot e_i,$$

az $f'(a)$ Jacobi-mátrix i-edik oszlopvektora.

Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ egy adott függvény, és $x \in D(f)$ esetén

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_q(x))^T.$$

Ha f differenciálható az $a \in D(f)$ pontban, akkor a 3.8.2. és 3.8.6. Tétel szerint

$$f'(a) = \big(\partial_j f_i(a)\big)_{\substack{i=1,\ldots,q \\ j=1,\ldots,p}} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \ldots & \partial_p f_1(a) \\ \partial_1 f_2(a) & \ldots & \partial_p f_2(a) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial_1 f_q(a) & \ldots & \partial_p f_q(a) \end{pmatrix}.$$

3.8.7. Példa. Definiáljuk az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt az

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0 \text{ vagy } y = 0, \\ 1, & \text{ha } x \neq 0 \text{ és } y \neq 0 \end{cases}$$

képlettel. Könnyű belátni, hogy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

de f nem folytonos a $(0, 0)$ pontban. Ezért a 3.7.4. Tétel szerint f nem differenciálható a $(0, 0)$ pontban.

Az előző példa azt mutatja, hogy a parciális deriváltak létezéséből még nem következik a függvény differenciálhatósága, sőt folytonossága sem. Ugyanakkor a következő tétel alapján a parciális deriváltak folytonossága, már maga után vonja a differenciálhatóságot.

3.8.8. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ és $a \in D(f)$. Ha minden $i \in \{1, \ldots, p\}$ esetén a $\partial_i f$ parciális derivált folytonos az a pontban, akkor f differenciálható a-ban.*

3.8.9. Példa. Legyen

$$f(x, y) = \sin(2x + y^2), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Bármely $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2\cos(2x + y^2) \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y\cos(2x + y^2).$$

A 3.6.6. Példában már beláttuk f folytonosságát. Hasonló módon ellenőrizhető, hogy a $\frac{\partial f}{\partial x}$ és $\frac{\partial f}{\partial y}$ függvények is folytonosak $\mathbb{R}^2$ minden pontjában. Ezért f differenciálható minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban, és

$$f'(x, y) = (2\cos(2x + y^2), 2y\cos(2x + y^2)).$$

Az f függvény $a = (0, 0)$ pontbeli $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ irány menti deriváltja

$$\partial_{(v)} f(a) = f'(a) \cdot v = (2, 0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Megjegyezzük, hogy egy kétváltozós valós f függvény differenciálhatósága egy $(a, b) \in D(f)$ pontban geometriailag azt jelenti, hogy a $z = f(x, y)$ felülethez annak $(a, b, f(a, b))$ pontjában érintősík illeszthető.

3.8.10. Definíció. Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenciálható az $(a, b) \in D(f)$ pontban. Ekkor a

$$z = \partial_1 f(a, b)(x - a) + \partial_2 f(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

egyenletű síkot az f függvény (a, b) ponthoz tartozó *érintősíkjának* nevezzük.

3.9. A láncszabály

Az összetett függvény differenciálási szabálya vektorfüggvényekre a következő:

3.9.1. Tétel (Láncszabály). *Legyen p, q, $r \in \mathbb{N}^+$. Ha $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ differenciálható az $a \in D(f)$ pontban és $g : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^r$ differenciálható az $f(a)$ pontban, akkor $g \circ f$ is differenciálható az a pontban, és*

$$D(g \circ f) = Dg(f(a)) \circ Df(a),$$

továbbá

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a),$$

ahol $\cdot$ *a mátrix szorzást jelöli, azaz minden* $i \in \{1, \dots, p\}$ *és* $k \in \{1, \dots, r\}$ *esetén*

$$\partial_i (g_k \circ f)(a) = \sum_{j=1}^{q} \partial_j g_k(f(a))\, \partial_i f_j(a),$$

ahol a g_k*-k és* f_j*-k a* g*, illetve* f *vektorfüggvény koordinátafüggvényei.*

3.10. Középértéktétel

Legyen $a, b \in \mathbb{R}^p$, $a \neq b$. Ekkor az a és b pontokat összekötő zárt *szakasz* pontjai $a + t(b - a)$ alakban írhatók, ahol $t \in [0, 1]$.

3.10.1. Definíció. Bármely $a, b \in \mathbb{R}^p$, $a \neq b$, esetén legyen

$$[a, b] = \{\, a + t(b - a) \mid t \in [0, 1]\},$$

és

$$(a, b) = \{\, a + t(b - a) \mid t \in (0, 1)\}.$$

A következő tétel Lagrange tételének általánosítása többváltozós valós függvényekre.

3.10.2. Tétel. *Legyen* $a, b \in \mathbb{R}^p$*,* $a \neq b$*. Ha* $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *folytonos az* $[a, b]$ *szakaszon és differenciálható minden* $x \in (a, b)$ *pontban, akkor létezik* $c \in (a, b)$ *úgy, hogy*

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a) = \sum_{i=1}^{p} \partial_i f(c)(b_i - a_i).$$

3.11. Schwarz tétele

3.11.1. Definíció. Ha $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ és valamely $i, j \in \{1, \dots, p\}$ és $a \in D(f)$ esetén a

$$\partial_j(\partial_i f)(a)$$

parciális differenciálhányados létezik, akkor azt a

$$\partial_{ij} f(a)$$

szimbólummal jelöljük. A $\partial_{ij} f$ függvények f *másodrendű parciális deriváltjai*.

Ha az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvény változóit rendre az $x_1, \dots, x_p$ betűkkel jelöljük, akkor $\partial_{ij} f(a)$ helyett a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a), \qquad f''_{x_i x_j}(a), \qquad \text{illetve} \qquad f_{x_i x_j}(a)$$

jelölés is használatos. Figyeljük meg, hogy a deriválások sorrendje az indexes jelölésmód esetén balról jobbra, a tört alakú jelölésmód esetén pedig jobbról balra halad. Ha $i = j$, akkor $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ helyett a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ jelölés használatos.

A $\partial_{ii} f$ alakúakat *tiszta,* a $\partial_{ij} f$ $(i \neq j)$ alakúakat pedig *vegyes* másodrendű parciális deriváltaknak szokás nevezni.

Az előző definícióhoz hasonlóan „rekurzióval” definiálhatók a harmadrendű, negyedrendű stb. parciális deriváltak. Az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvény $\partial_i f$ $(i \in \{1, \ldots, p\})$ parciális deriváltjait *elsőrendű parciális deriváltaknak* mondjuk, ha szükség van megkülönböztetésükre a magasabb rendűektől.

A következő tétel azt mutatja, hogy bizonyos feltételek mellett a vegyes parciális deriváltak kiszámításakor a deriválások sorrendje felcserélhető.

3.11.2. Tétel (Schwarz tétele)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ adott függvény. Tegyük fel, hogy a $\partial_1 f$, $\partial_2 f$ függvények definiálva vannak az $(a, b) \in D(f)$ pont valamely környezetében és a $\partial_{12} f$ függvény folytonos az (a, b) pontban. Ekkor $\partial_{21} f(a, b)$ létezik, és*

$$\partial_{21} f(a, b) = \partial_{12} f(a, b).$$

3.12. Abszolút és lokális szélsőértékhelyek

Az egyváltozós valós függvények esetéhez hasonlóan bevezetjük a következő elnevezéseket:

3.12.1. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $a \in H \subset D(f)$. Azt mondjuk, hogy az a pont f-nek H-ra nézve *abszolút maximumhelye (abszolút minimumhelye),* ha minden $x \in H$ esetén

$$f(x) \leq f(a) \qquad (f(x) \geq f(a)).$$

Az abszolút maximumhely és abszolút minimumhely helyett a *globális maximumhely*, illetve *globális minimumhely* elnevezés is használatos.

A következő tétel Weierstrass tételének kiterjesztése többváltozós függvényekre.

3.12.2. Tétel. *Legyen H nemüres, korlátos és zárt részhalmaza $\mathbb{R}^p$-nek. Ha $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ folytonos a H halmazon, akkor f-nek H-ra nézve létezik abszolút maximumhelye és abszolút minimumhelye is.*

Most a lokális szélsőértékhelyeket definiáljuk.

3.12.3. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az $a \in D(f)$ pont az f függvény *lokális maximumhelye (lokális minimumhelye),* ha létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $K_\delta(a) \subset D(f)$, és minden $x \in K_\delta(a)$, $x \neq a$, esetén

$$f(x) \leq f(a) \qquad (f(x) \geq f(a)).$$

Ha a $\leq$ $(\geq)$ egyenlőtlenséget $<$-re $(>$-ra) cseréljük, akkor a *szigorú lokális maximumhely (szigorú lokális minimumhely)* definícióját kapjuk.

Lokális szélsőértékhely létezésére ad szükséges feltételt a következő:

3.12.4. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} D(f)$. Tegyük fel, hogy a az f függvény lokális maximumhelye vagy minimumhelye. Ha valamely $i \in \{1, \dots, p\}$ esetén $\partial_i f(a)$ létezik, akkor $\partial_i f(a) = 0$. Speciálisan, ha f differenciálható az a pontban, akkor minden $i \in \{1, \dots, p\}$ esetén $\partial_i f(a) = 0$.*

A tétel megfordítása nem igaz, amint erre már az egyváltozós valós függvényeknél is utaltunk.

3.12.5. Definíció. Legyen adva egy $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény. Az $a \in D(f)$ pontot f *kritikus (stacionárius) pontjának* mondjuk, ha $a \in \operatorname{int} D(f)$ és minden $i \in \{1, \dots, p\}$ esetén $\partial_i f(a) = 0$.

Az előző tétel szerint egy differenciálható függvénynek csak kritikus pont lehet lokális szélsőértékhelye.

3.12.6. Példa. Az

$$f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x + y, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

függvénynek nincsen maximumhelye, mert minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3(x^2 + 1) > 0.$$

Most keressük f maximumát a

$$H = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x \}$$

halmazra nézve. Mivel H korlátos és zárt, f pedig folytonos H-n, ezért f-nek H-ra nézve létezik maximumhelye. A

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3(x^2 + 1) > 0, \qquad x \in \mathbb{R},$$

egyenlőtlenségből következik, hogy minden rögzített $y \in [0, 1]$ esetén a $h(x) = f(x, y)$, $x \in \mathbb{R}$, függvény szigorúan monoton növekedő. Ezért

$$\max_{(x,y)\in H} f(x, y) = \max_{x\in[0,1]} f(x, 1 - x).$$

Mivel minden $x \in [0, 1]$ esetén

$$\frac{d}{dx}\big(f(x, 1 - x)\big) = 6x^2 - 6x + 5 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2} > 0,$$

ezért

$$\max_{(x,y)\in H} f(x, y) = f(1, 0) = 4.$$

A következő tétel elegendő feltételt ad arra, hogy egy kétváltozós valós függvénynek egy adott kritikus pontban lokális szélsőértéke legyen.

3.12.7. Tétel. *Legyen adva egy $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvény és $(a,b)\in \operatorname{int} D(f)$. Tegyük fel, hogy f másodrendű parciális deriváltjai folytonosak az (a,b) pontban, továbbá*

$$\partial_1 f(a,b)=\partial_2 f(a,b)=0.$$

Ha

$$\partial_{11}f(a,b)\,\partial_{22}f(a,b)-\big[\,\partial_{12}f(a,b)\big]^2>0,$$

akkor (a,b) f-nek lokális szélsőértékhelye, mégpedig ha

$$\partial_{11}f(a,b)>0,$$

akkor lokális minimumhelye, ha pedig

$$\partial_{11}f(a,b)<0,$$

akkor lokális maximumhelye.

Ha

$$\partial_{11}f(a,b)\,\partial_{22}f(a,b)-\big[\,\partial_{12}f(a,b)\big]^2<0,$$

akkor (a,b) f-nek nem lokális szélsőértékhelye.

3.12.8. Példa. Legyen

$$f(x,y)=x^3+y^3-3xy,\qquad \text{ha } (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Ekkor minden $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ esetén

$$\partial_1 f(x,y)=3x^2-3y\qquad \text{és}\qquad \partial_2 f(x,y)=3y^2-3x.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy f-nek két kritikus pontja van, $(0,0)$ és $(1,1)$. A

$$\partial_{11}f(x,y)=6x,\qquad \partial_{22}f(x,y)=6y,\qquad \partial_{12}f(x,y)=-3,\qquad \partial_{21}f(x,y)=-3$$

másodrendű parciális deriváltak folytonosak. Mivel

$$\partial_{11}f(0,0)\,\partial_{22}f(0,0)-\big[\partial_{12}f(0,0)\big]^2=-9<0,$$

ezért a $(0,0)$ pont nem lokális szélsőértékhely. Ugyanakkor

$$\partial_{11}f(1,1)\,\partial_{22}f(1,1)-\big[\partial_{12}f(1,1)\big]^2=27>0\qquad \text{és}\qquad \partial_{11}f(1,1)=6>0$$

folytán az $(1,1)$ pont f lokális minimumhelye.

4. fejezet

Területi integrál

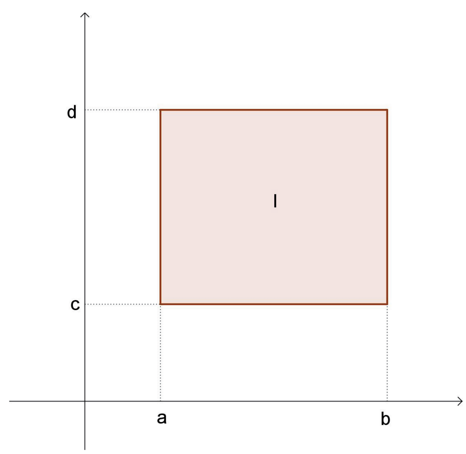
4.1. A terület fogalma

Definiálni szeretnénk síkidomok, azaz $\mathbb{R}^2$ részhalmazainak a területét. A terület fogalmát a téglalapok területére fogjuk visszavezetni. Ezt a célt szolgálják a következő definíciók.

4.1.1. Definíció. Legyen a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$. Az

$$I = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$$

halmazt *(kétdimenziós) intervallumnak* nevezzük (lásd a 4.1. ábra).



4.1. ábra.

Az I intervallum *területe:*

$$t(I) = (b - a)(d - c).$$

4.1.2. Definíció. A $H_1, \dots, H_n$ halmazokat, ahol $n \in \mathbb{N}^+$ és $H_i \subset \mathbb{R}^2$ ($i \in \{1, \dots, n\}$), *egymásba nem nyúlóknak* mondjuk, ha bármely $i \neq j$ esetén

$$\operatorname{int} H_i \cap \operatorname{int} H_j = \emptyset,$$

azaz H_i-nek és H_j-nek nincs közös belső pontja.

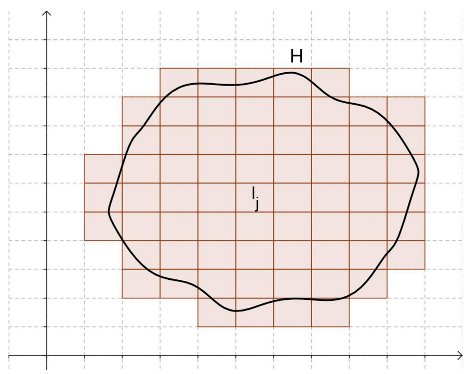
Most már definiálhatjuk egy korlátos síkbeli halmaz külső és belső területét.

4.1.3. Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmaz. Legyen $k(H)$ az összes olyan

$$\sum_{j=1}^{n} t(I_j)$$

alakú összegből álló számhalmaz infimuma (alsó határa), ahol $n \in \mathbb{N}^+$, az $I_j \subset \mathbb{R}^2$ halmazok pedig intervallumok ($j = 1, \ldots, n$), amelyek befedik H-t (lásd a következő ábra), azaz

$$H \subset \bigcup_{j=1}^{n} I_j.$$



4.2. ábra.

A $k(H)$ számot a H halmaz *külső területének* nevezzük.

A H halmaz *belső területe,* jelben $b(H)$, az összes olyan

$$\sum_{j=1}^{n} t(I_j)$$

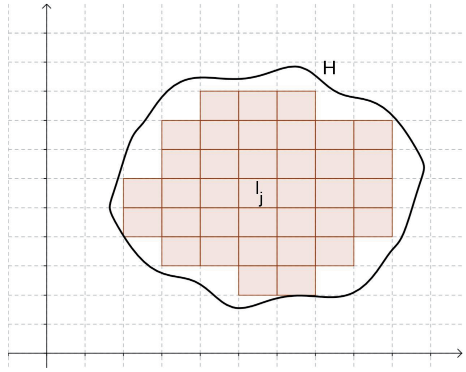
alakú összegből álló számhalmaz szuprémuma (alsó határa), ahol $n \in \mathbb{N}^+$, az $I_j \subset \mathbb{R}^2$ halmazok pedig egymásba nem nyúló intervallumok, amelyekre $I_j \subset H$ ($j = 1, \ldots, n$) (lásd a következő ábra), feltéve, hogy H tartalmaz egyáltalán intervallumot. Ha H egyetlen intervallumot sem tartalmaz, legyen $b(H) = 0$.

Nyilvánvaló, hogy az imént definiált $b(H)$ és $k(H)$ számok alsó, illetve felső becslést adnak a H halmaz általunk definiálni kívánt területére. A H halmaz korlátosságát azért kell feltennünk, hogy be lehessen fedni véges számú intervallummal. Ezek után kézenfekvő a következő:

4.1.4. Definíció. A $H \subset \mathbb{R}^2$ halmazt *mérhetőnek* mondjuk, ha H korlátos és $b(H) = k(H)$. Ha H mérhető, akkor H *területén* a

$$t(H) = b(H) = k(H)$$

számot értjük.



4.3. ábra.

A területnek ez a fogalma Jordan francia matematikustól származik. A terület fontosabb tulajdonságait foglalják össze a következő tételek.

4.1.5. Tétel. *Ha H_1 és H_2 mérhetők, akkor $H_1 \cup H_2$, $H_1 \cap H_2$, $H_1 \setminus H_2$ is mérhető.*

4.1.6. Tétel. *Ha a $H_1, \dots, H_n$ halmazok mérhetők és egymásba nem nyúlók, továbbá*

$$H = \bigcup_{j=1}^{n} H_j,$$

akkor H is mérhető, és

$$t(H) = \sum_{j=1}^{n} t(H_j).$$

4.1.7. Tétel. *Egy $H \subset \mathbb{R}^2$ halmazra a következő állítások egyenértékűek:*
(i) $t(H) = 0$,
(ii) $k(H) = 0$,
(iii) bármely $\epsilon > 0$ esetén léteznek $I_1, \dots, I_n$ intervallumok úgy, hogy

$$H \subset \bigcup_{j=1}^{n} I_j \qquad \text{és} \qquad \sum_{j=1}^{n} t(I_j) < \epsilon.$$

4.1.8. Tétel. *A $H \subset \mathbb{R}^2$ halmaz pontosan akkor mérhető, ha korlátos és határa nulla területű.*

A síkban bevezetett területfogalom mintájára bevezethetnénk a háromdimenziós térben vagy általánosabban az $\mathbb{R}^p$ térben a *Jordan-féle térfogat* fogalmát. Nyilvánvaló, hogy $\mathbb{R}^p$-ben a p-dimenziós

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \cdots \times [a_p, b_p]$$

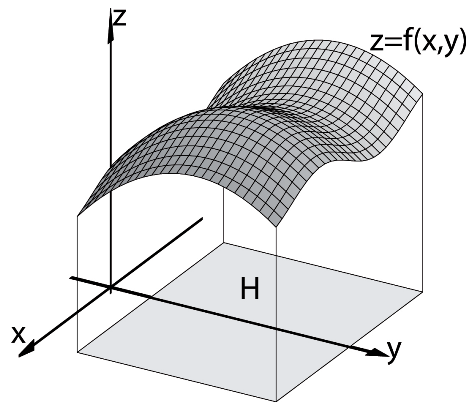
intervallumok

$$t(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_p - a_p)$$

térfogatából kellene kiindulnunk.

4.2. A területi integrál fogalma

Legyen adva egy mérhető és zárt $H \subset \mathbb{R}^2$ halmaz és egy H-n folytonos nemnegatív $f : H \to [0, \infty)$ függvény. Kiszámítandó annak a testnek a V térfogata, amelyet felülről a $z = f(x, y)$ felületnek H feletti része, alulról pedig az xy-síkbeli H halmaz határol (lásd a 4.4. ábra).



4.4. ábra.

Az egyváltozós Riemann-integrál mintájára az alábbi fogalmak segítségével alsó és felső becslést adhatunk a kiszámítandó test térfogatára.

4.2.1. Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ mérhető. A H halmaz Φ *felosztásán* olyan egymásba nem nyúló, nemüres mérhető $H_1, \dots, H_n$ halmazok (véges) sorozatát értjük, amelyekre

$$\bigcup_{j=1}^{n} H_j = H.$$

Jelölés: $\Phi = \{H_1, \dots, H_n\}$.

4.2.2. Definíció. Legyen adva egy $H \subset \mathbb{R}^2$ mérhető halmaz és egy f korlátos valós függvény a H halmazon. Ha $\varPhi = \{H_1, \dots, H_n\}$ a H halmaz egy felosztása, akkor f korlátossága miatt minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén az

$$m_i = \inf f(H_i), \qquad M_i = \sup f(H_i)$$

számok végesek. Az

$$s_{\varPhi} = \sum_{i=1}^{n} m_i\, t(H_i)$$

összeget az f függvény $\varPhi$ felosztáshoz tartozó *(Darboux-féle) alsó összegének,* a

$$S_{\varPhi} = \sum_{i=1}^{n} M_i\, t(H_i)$$

összeget pedig az f függvény Φ felosztáshoz tartozó *(Darboux-féle) felső összegének* nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy ha f korlátos a mérhető H halmazon, akkor H bármely Φ felosztására

$$t(H)\inf f(H) \le s_\Phi \le S_\Phi \le t(H)\sup f(H).$$

4.2.3. Definíció. Bármely a $H \subset \mathbb{R}^2$ mérhető halmazon definiált korlátos f függvény esetén legyen

$$I_A = \sup\{\, s_\Phi \mid \Phi \text{ a } H \text{ halmaz felosztása, } \}$$

és

$$I_F = \inf\{\, S_\Phi \mid \Phi \text{ az } H \text{ halmaz felosztása} \}.$$

Az I_A számot f H-n vett *(Darboux-féle) alsó integráljának,* az I_F számot pedig f H-n vett *(Darboux-féle) felső integráljának* nevezzük.

Ha V annak a testnek a térfogata, amelyre a szakasz elején utaltunk, akkor H bármely $\mathit{\Phi}$ felosztására

$$s_{\mathit{\Phi}} \le V \le S_{\mathit{\Phi}},$$

és ezért

$$I_A \le V \le I_F.$$

4.2.4. Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ mérhető. A H-n definiált f függvényt *integrálhatónak* mondjuk, ha f korlátos és $I_A = I_F$. Ha f integrálható H-n, akkor az

$$I = I_A = I_F$$

közös értéket f H-n vett *(Riemann-féle) területi integráljának* nevezzük. Jele:

$$I = \iint_H f(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{vagy csak} \qquad \iint_H f.$$

4.3. A területi integrál tulajdonságai

4.3.1. Tétel (Egzisztencia tétel)**.** *Ha $H \subset \mathbb{R}^2$ mérhető és zárt, f pedig folytonos H-n, akkor f integrálható is.*

A tételből és a 4.2.4. Definíció előtti megjegyzésből adódik a területi integrál geometriai jelentése: ha $H \subset \mathbb{R}^2$ mérhető és zárt, f pedig egy a H-n folytonos nemnegatív függvény, akkor $\iint_H f$ annak a testnek a térfogata, amelyet felülről a $z = f(x,y)$ felület H feletti része alulról pedig az xy-síkbeli H halmaz határol.

A területi integrál fontosabb tulajdonságait írják le a következő tételek.

4.3.2. Tétel. *Ha f integrálható a mérhető H-n, és $G \subset H$ mérhető, akkor f integrálható G-n is.*

4.3.3. Tétel. *Ha f integrálható az egymásba nem nyúló, mérhető H_i ($i = 1, \dots, n$) halmazok mindegyikén, akkor integrálható a*

$$H = \bigcup_{i=1}^{n} H_i$$

halmazon is, és

$$\iint_H f = \sum_{i=1}^{n} \iint_{H_i} f.$$

4.3.4. Tétel. *Ha f és g integrálható a mérhető H halmazon, $c \in \mathbb{R}$, akkor cf és $f+g$ is integrálható H-n, és*

$$\iint_H (cf) = c \iint_H f,$$

$$\iint_H (f+g) = \iint_H f + \iint_H g.$$

4.3.5. Tétel. *Ha f és g integrálható a mérhető H halmazon, és $f \leq g$ H-n, akkor*

$$\iint_H f \leq \iint_H g.$$

4.3.6. Tétel. *Ha f integrálható a mérhető H halmazon, akkor $|f|$ is integrálható H-n, és*

$$\left| \iint_H f \right| \leq \iint_H |f|.$$

4.4. A területi integrál kiszámítása

Most olyan tételeket ismertetünk, amelyek lehetővé teszik a területi integrál kiszámítását egyváltozós Riemann-integrálokkal. Először nézzük az intervallumon való integrálást.

4.4.1. Tétel. *Legyen f integrálható az*

$$I = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$$

intervallumon, és tegyük fel, hogy minden $x \in [a,b]$ esetén létezik az (x-től függő)

$$g(x) = \int_a^b f(x,y)\,dy$$

integrál. Ekkor g integrálható $[a,b]$-n, és

$$\iint_I f = \int_a^b g(x)\,dx,$$

avagy

$$\iint_I f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx.$$

A 4.4.1. Tétel feltételei teljesülnek, ha például f folytonos az I intervallumon.

Természetesen x és y szerepe felcserélhető, azaz ha f integrálható I-n, és minden rögzített $y \in [c,d]$ esetén létezik a

$$h(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

integrál, akkor h interálható $[c, d]$-n, és

$$\iint_I f = \int_c^d h(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,dx \right) dy.$$

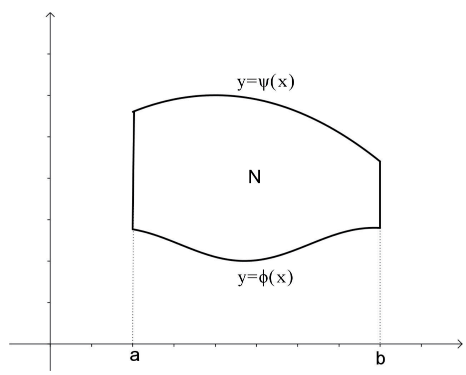
Az utolsó „kétszeres integrálnál” a zárójelet néha el is szokták hagyni. Hangsúlyozzuk, hogy ilyenkor az integrálás mindig belülről halad kifelé.

A területi integrálnak kétszeres integrállá való átalakítása alkalmazható az intervallumoknál általánosabb síkidomokon is. Vezessük be a következő elnevezést:

4.4.2. Definíció. Legyen ϕ és ψ az $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon definiált folytonos valós függvény, és $\phi \leq \psi$ az $[a, b]$-n. Ekkor az

$$N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

halmazt y-ra nézve *normáltartománynak* nevezzük (lásd a következő ábra).



4.5. ábra.

Hasonlóan az

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y \leq b, \phi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

alakú halmazok neve x-re nézve *normáltartomány* (lásd a következő ábra).

Meg lehet mutatni, hogy:

4.4.3. Tétel. *Bármely normáltartomány korlátos, zárt és mérhető, továbbá ha f integrálható az előző definícióban szereplő N normáltartományon, akkor*

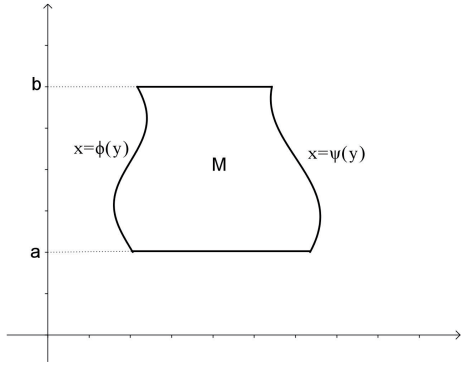
$$\iint_N f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy \right) dx,$$

feltéve, hogy a jobb oldali belső integrál minden $x \in [a, b]$-re létezik.

Hasonlóképpen, ha f integrálható az M normáltartományon, akkor

$$\iint_M f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,dx \right) dy,$$

feltéve, hogy a jobb oldali belső integrál minden $y \in [a, b]$-re létezik.



4.6. ábra.

Megjegyezzük, hogy ha f folytonos az N, illetve M normáltartományon, akkor a 4.4.3. Tétel feltételei teljesülnek.

Az

$$\int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \qquad \text{és} \qquad \int_a^b \left(\int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

kétszeres integrálokat szokták az

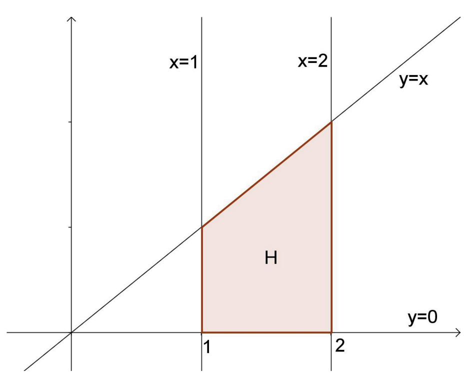
$$\int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy, \qquad \text{illetve} \qquad \int_a^b dy \int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx$$

alakban is írni.

4.4.4. Példa. Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ az a korlátos halmaz, amelyet az $y = x$, $y = 0$, $x = 1$ és $x = 2$ egyenesek határolnak, és számítsuk ki a

$$\iint_H e^{\frac{y}{x}}\,dx\,dy$$

területi integrált!



4.7. ábra.

Nyilván
$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$$
(lásd a 4.7. ábra).

Mivel H normáltartomány y-ra nézve és az integrandus folytonos H-n, ezért

$$\begin{aligned}\iint_H e^{\frac{y}{x}}\,dx\,dy &= \int_1^2 \left(\int_0^x e^{\frac{y}{x}}\,dy\right) dx = \int_1^2 \left[xe^{\frac{y}{x}}\right]_{y=0}^{x} dx \\ &= \int_1^2 x(e-1)\,dx = \left[(e-1)\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3(e-1)}{2}.\end{aligned}$$

5. fejezet

Differenciálegyenletek

5.1. Elsőrendű lineáris differenciálegyenlet

Közönséges (skaláris) differenciálegyenlet alatt olyan függvényegyenletet értünk, amelyben az ismeretlen egyváltozós valós y függvénynek a deriváltjai is szerepelnek. Egy n-ed rendű differenciálegyenletet szimbolikusan az

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

képlettel írhatunk le, ahol $F : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ adott függvény. Az y függvény akkor *megoldása* a differenciálegyenletnek valamely $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, ha y differenciálható I-n, és minden $x \in I$-re

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

(A deriváltak alatt az I-re vonatkozó deriváltakat kell érteni, tehát zárt intervallum esetén a végpontokban a megfelelő féloldali deriváltakat.) Ebben a fejezetben a skaláris differenciálegyenletek néhány típusának a megoldását fogjuk vizsgálni. Először tekintsük az

$$y' + p(x)y = q(x)$$

elsőrendű lineáris differenciálegyenletet, ahol p és q az $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett folytonos valós függvény. Ha q azonosan nulla (α, β)-n, akkor az egyenletet *homogénnek,* különben pedig *inhomogénnek* nevezzük.

Tegyük fel, hogy y megoldása a differenciálegyenletnek az (α, β) intervallumon, azaz

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x),$$

minden $x \in (\alpha, \beta)$-ra. Legyen P primitív függvénye p-nek (α, β)-n. Az utolsó egyenletet $e^{P(x)}$-szel szorozva azt kapjuk, hogy minden $x \in (\alpha, \beta)$ esetén

$$y'(x)e^{P(x)} + p(x)y(x)e^{P(x)} = q(x)e^{P(x)}.$$

Ez ekvivalens az

$$\big(y(x)e^{P(x)}\big)' = q(x)e^{P(x)},$$

$$y(x)e^{P(x)} = \int q(x)e^{P(x)}\,dx,$$

és

$$y(x) = e^{-P(x)} \int q(x)e^{P(x)}\,dx, \qquad x \in (\alpha, \beta)$$

egyenletekkel. Tehát igaz a következő:

5.1.1. Tétel. *Legyen p és q az (α,β)-n folytonos függvény. Ha P és G primitív függvénye p-nek, illetve $q \cdot (\exp \circ P)$-nek (α,β)-n, akkor y pontosan akkor megoldása az*

$$y' + p(x)y = q(x)$$

egyenletnek az (α,β) intervallumon, ha valamely $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$y(x) = e^{-P(x)}\big(G(x) + c\big),$$

minden $x \in (\alpha,\beta)$-ra.

A megoldások alakjából látszik, hogy ha előírjuk az

$$y(x_0) = y_0$$

kezdeti feltételt, ahol $x_0 \in (\alpha,\beta)$ és $y_0 \in \mathbb{R}$, akkor ennek pontosan egy megoldás tesz eleget.

5.1.2. Példa. Keressük az

$$y' + 3y = x, \qquad y(0) = 1$$

kezdetiérték-feladat megoldását!

Az előző tétel szerint

$$y(x) = e^{-3x} \int xe^{3x}\,dx, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\int xe^{3x}\,dx = \int x\left(\frac{e^{3x}}{3}\right)'dx = x\frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3}\,dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + c.$$

Ezért

$$y(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{9} + ce^{-3x}.$$

Figyelembe véve az $y(0) = 1$ kezdeti feltételt, azt kapjuk, hogy

$$1 = y(0) = -\frac{1}{9} + c,$$

és innen $c = \dfrac{10}{9}$. Tehát a kezdetiérték-feladat megoldása

$$y(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{9} + \frac{10}{9}e^{-3x}, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

5.2. Szeparábilis differenciálegyenlet

Szeparábilis differenciálegyenletnek az

$$y' = g(x)h(y)$$

alakú differenciálegyenletet nevezzük, ahol $g : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ és $h : (\gamma, \delta) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ folytonos függvények, (α, β) és $(\gamma, \delta) \subset \mathbb{R}$ intervallumok.

Tegyük fel, hogy y megoldása a differenciálegyenletnek valamely $(a, b) \subset (\alpha, \beta)$ intervallumon, azaz minden $x \in (a, b)$-re.

$$y'(x) = g(x)h(y(x)).$$

Azt kapjuk, hogy minden $x \in (a, b)$-re

$$\frac{y'(x)}{h(y(x))} - g(x) = 0,$$

amely ekvivalens az

$$\big(F(y(x)) - G(x)\big)' = 0$$

feltétellel, ahol F primitív függvénye $\dfrac{1}{h}$-nak a (γ, δ)-n, G pedig primitív függvénye g-nek az (α, β)-n. Ez pontosan akkor teljesül, ha létezik $c \in \mathbb{R}$ úgy, hogy

$$F(y(x)) = G(x) + c,$$

minden $x \in (a, b)$-re. Tehát igaz a következő:

5.2.1. Tétel. *Legyenek $g : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ és $h : (\gamma, \delta) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ adott folytonos függvények. Legyen F primitív függvénye $\dfrac{1}{h}$-nak (γ, δ)-n és G primitív függvénye g-nek (α, β)-n. Ekkor egy y függvény pontosan akkor megoldása az*

$$y' = g(x)h(y)$$

egyenletnek valamely $(a, b) \subset (\alpha, \beta)$ intervallumon, ha létezik $c \in \mathbb{R}$ úgy, hogy minden $x \in (a, b)$-re

$$F(y(x)) = G(x) + c.$$

Megjegyezzük, hogy a lineáris differenciálegyenletekkel ellentétben a szeparábilis differenciálegyenlet megoldásai általában nincsenek értelmezve a teljes (α, β) intervallumon.

5.2.2. Példa. Keressük az

$$y' = y^2, \qquad y(0) = 1,$$

kezdetiérték-feladat megoldását. Mivel $y(0) > 0$ és y-nak nem lehet zérushelye, ezért $y > 0$ mindenütt, ahol értelmezve van. A tétel jelöléseivel

$$g(x) = 1, \qquad (\alpha, \beta) = (-\infty, \infty),$$
$$h(x) = x^2, \qquad (\gamma, \delta) = (0, \infty),$$

ezért a tétel szerint létezik $c \in \mathbb{R}$ úgy, hogy

$$-\frac{1}{y(x)} = x + c.$$

Figyelembe véve az $y(0) = 1$ feltételt azt kapjuk, hogy $c = -1$, és így

$$y(x) = \frac{1}{1-x}.$$

A megoldás csak a $(-\infty, 1)$ intervallumon van értelmezve.

5.3. Másodrendű lineáris homogén egyenlet

Legyen a, $b \in \mathbb{R}$. Az

$$y'' + ay' + by = 0$$

egyenletet *másodrendű állandó együtthatós lineáris homogén differenciálegyenletnek* nevezzük. Ha a megoldásokat $y(x) = e^{\lambda x}$, $x \in (-\infty, \infty)$, alakban keressük, akkor a

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

karakterisztikus egyenlethez jutunk. A következő tétel megadja a karakterisztikus gyököktől függően az egyenlet megoldásait.

5.3.1. Tétel. *Legyen a, $b \in \mathbb{R}$. Legyenek a*

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

egyenlet gyökei λ_1 és λ_2.

(i) Ha λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, akkor az egyenlet minden megoldása

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

alakú, ahol c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.

(ii) Ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$, akkor az egyenlet minden megoldása

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

alakú, ahol c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.

(iii) Ha λ_1 és λ_2 komplex, azaz $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, ($\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$), akkor az egyenlet minden megoldása

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

alakú, ahol c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.

A tételben szereplő megoldások a teljes számegyenesen értelmezve vannak.

5.3.2. Példa. Keressük az

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

egyenlet megoldásait. Mivel a

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökei $\lambda_1 = -2$ és $\lambda_2 = -1$, ezért a tétel szerint minden megoldás

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}, \qquad x \in (-\infty, \infty),$$

alakú, ahol c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.

5.4. Másodrendű lineáris inhomogén egyenlet

Most tekintsük az

$$y'' + ay' + by = f(x),$$

inhomogén egyenletet, ahol a, $b \in \mathbb{R}$, f pedig egy $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ intervallumon folytonos függvény. Az inhomogén és a hozzá tartozó homogén egyenlet megoldásai a következő kapcsolatban vannak:

5.4.1. Tétel. *Legyen a, $b \in \mathbb{R}$ és f az (α, β)-n folytonos függvény. Ha y_P az*

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

egyenlet megoldása (α, β)-n, akkor az inhomogén egyenlet bármely más y megoldása (α, β)-n az

$$y = y_P + y_H$$

alakban írható, ahol y_H az

$$y'' + ay' + by = 0$$

homogén egyenlet megoldása.

Mivel a homogén egyenlet megoldásait ismerjük, a tétel szerint ahhoz, hogy felírjuk az inhomogén egyenlet összes megoldását elég ismerni az inhomogén egyenlet egyetlen konkrét megoldását, amelyet *partikuláris megoldásnak* is szokás nevezni. A következő tétel speciális alakú jobb oldal esetén megadja a partikuláris megoldás lehetséges alakját.

5.4.2. Tétel. *Tekintsük az*

$$y'' + ay' + by = p(x)\, e^{\mu x} \cos(\nu x)$$

inhomogén egyenletet, ahol a, b, μ, $\nu \in \mathbb{R}$, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pedig polinom. Legyenek λ_1 és λ_2 a homogén egyenlet

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

karakterisztikus egyenletének gyökei. Legyen $\lambda_* = \mu + i\nu$, és definiáljuk az s számot az

$$s = \begin{cases} 0, & \text{ha } \lambda_* \neq \lambda_1 \text{ és } \lambda_* \neq \lambda_2 \\ 1, & \text{ha } \lambda_* = \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ vagy } \lambda_* = \lambda_2 \neq \lambda_1 \\ 2, & \text{ha } \lambda_* = \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$$

képlettel. Ekkor az inhomogén egyenletnek létezik

$$y_P(x) = x^s\big[q_1(x)\, e^{\mu x} \cos(\nu x) + q_2(x)\, e^{\mu x} \sin(\nu x)\big]$$

alakú megoldása, ahol q_1 és q_2 ugyanolyan fokú polinom, mint p.

Az állítás akkor is igaz, ha az inhomogén egyenlet jobb oldalán $\cos(\nu x)$*-et* $\sin(\nu x)$*-re cseréljük.*

5.4.3. Példa. Keressük az

$$y'' + 3y' + 2y = \cos(2x)$$

egyenlet megoldásait. Az

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

homogén egyenlet karakterisztikus egyenletének gyökei $\lambda_1 = -2$ és $\lambda_2 = -1$. A tétel jelöléseivel $p(x) = 1$, $\mu = 0$ és $\nu = 2$. Ezért $\lambda_* = 2i$ és $s = 0$. A tétel szerint az

$$y'' + 3y' + 2y = \cos(2x)$$

egyenletnek létezik

$$y_P(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$$

alakú megoldása, ahol $A, B \in \mathbb{R}$. Deriválással kapjuk, hogy

$$y_P'(x) = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x),$$

és

$$y_P''(x) = -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x).$$

Behelyettesítve y_P, y_P' és y_P'' képleteit az inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$(-2A + 6B)\cos(2x) - (6A + 2B)\sin(2x) = \cos(2x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Innen

$$\begin{aligned} -2A + 6B &= 1, \\ 6A + 2B &= 0. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása

$$A = -\frac{1}{20}, \qquad B = \frac{3}{20}.$$

Tehát

$$y_P(x) = -\frac{1}{20}\cos(2x) + \frac{3}{20}\sin(2x).$$

Ezt az 5.3. Példa eredményével kombinálva kapjuk, hogy az inhomogén egyenlet összes megoldása

$$y(x) = -\frac{1}{20}\cos(2x) + \frac{3}{20}\sin(2x) + c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}, \qquad x \in (-\infty, \infty),$$

alakú, ahol c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.

A következő tétel segítségével jelentősen kibővíthetjük azoknak az egyenleteknek a körét, amelyeket a „próbafüggvény módszerével” megoldhatunk.

5.4.4. Tétel (A szuperpozíció elve)**.** *Legyen a, $b \in \mathbb{R}$, f_1, f_2 pedig egy (α, β) intervallumon folytonos függvény. Ha y_1 és y_2 megoldása (α, β)-n az*

$$y'' + ay' + by = f_1(x),$$

illetve az

$$y'' + ay' + by = f_2(x)$$

egyenletnek, akkor $y_1 + y_2$ megoldása (α, β)-n az

$$y'' + ay' + by = f_1(x) + f_2(x)$$

egyenletnek.

5.4.5. Példa. Az előző tétel szerint az

$$y'' + 3y' + 2y = \cos(2x) + 1$$

egyenlet partikuláris megoldása az

$$y'' + 3y' + 2y = \cos(2x)$$

és

$$y'' + 3y' + 2y = 1$$

egyenlet y_1, illetve y_2 partikuláris megoldásainak az összege. Az 5.4.3. Példában már beláttuk, hogy

$$y_1(x) = -\frac{1}{20}\cos(2x) + \frac{3}{20}\sin(2x), \qquad (-\infty, \infty),$$

és hasonló számolással kapjuk, hogy

$$y_2(x) = \frac{1}{2}, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

Tehát az

$$y'' + 3y' + 2y = \cos(2x) + 1$$

egyenlet partikuláris megoldása

$$y_P(x) = -\frac{1}{20}\cos(2x) + \frac{3}{20}\sin(2x) + \frac{1}{2}, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

Mivel az

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

homogén egyenlet megoldásai

$$y_H(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x}, \qquad x \in (-\infty, \infty),$$

alakúak, ahol c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$, az 5.4.1. Tétel szerint az

$$y'' + 3y' + 2y = \cos(2x) + 1$$

egyenlet minden megoldása

$$y(x) = -\frac{1}{20}\cos(2x) + \frac{3}{20}\sin(2x) + \frac{1}{2} + c_1e^{-2x} + c_2e^{-x}, \qquad x \in (-\infty, \infty),$$

alakú, ahol c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.

Irodalomjegyzék

[1] Császár Ákos: *Valós analízis II.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1988

[2] Dósa György–Szalkai István: *Kalkulus példatár informatikusoknak II.* Typotex Kiadó, Budapest, 2011

[3] Elaydi Saber: *An Introduction to Difference Equations.* Springer, 2005

[4] Hatvani László: *Kalkulus közgazdászoknak.* Polygon, Szeged, 2006

[5] Laczkovich Miklós–T. Sós Vera: *Analízis II.* Nemzeti Tankönykiadó, Budapest, 2007