

Gyakorló feladatok - 6.

MA6213d

1. Ábrázolja a következő egyenletek néhány trajektóriáját az origó környezetében! Adja meg a kritikus pont típusát, és határozza meg, hogy stabil, aszimptotikusan stabil vagy instabil a kritikus pont!

$$(a) \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad (b) \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

$$(c) \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad (d) \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

$$(e) \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad (f) \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

$$(g) \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad (h) \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -0.25 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

$$(i) \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad (j) \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

2. Határozza meg a következő egyenletek kritikus pontját, a kritikus pont típusát és a stabilitási tulajdonságát!

$$(a) \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(b) \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(c) \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

3. Tekintsük a

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \epsilon & 1 \\ -1 & \epsilon \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

egyenletet. Adja meg az origó típusát, és határozza meg, hogy stabil, aszimptotikusan stabil vagy instabil a kritikus pont, ha

$$(a) \quad \epsilon = 0, \quad (b) \quad \epsilon < 0, \quad (c) \quad \epsilon > 0!$$

4. Tekintsük a

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\epsilon & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

egyenletet. Adja meg az origó típusát, és határozza meg, hogy stabil, aszimptotikusan stabil vagy instabil a kritikus pont, ha

$$(a) \quad \epsilon = 0, \quad (b) \quad \epsilon < 0, \quad (c) \quad \epsilon > 0!$$

5. Mutassa meg, hogy az origó kritikus pontja a következő rendszereknek, és vizsgálja meg az origó stabilitási tulajdonságát!

- (a) $x' = x - y + xy, \quad y' = 3x - 2y - xy,$
- (b) $x' = x + x^2 + y^2, \quad y' = y - xy,$
- (c) $x' = -2x - y - x(x^2 + y^2), \quad y' = x - y + y(x^2 + y^2),$
- (d) $x' = y + x(1 - x^2 - y^2), \quad y' = -x + y(1 - x^2 - y^2),$
- (e) $x' = 2x + y + xy^3, \quad y' = x - 2y - xy,$
- (f) $x' = x + 2x^2 - y^2, \quad y' = x - 2y + x^3.$

6. Keresse meg a következő rendszerek összes valós kritikus pontjait, és vizsgálja meg ezekben a pontokban a kritikus pontok stabilitási tulajdonságait!

- (a) $x' = x(1.5 - x - 0.5y), \quad y' = y(2 - y - 0.75x),$
- (b) $x' = x(1.5 - x - 0.5y), \quad y' = y(2 - 0.5y - 1.5x),$
- (c) $x' = x(1.5 - 0.5y), \quad y' = y(-0.5 + x),$
- (d) $x' = x(1 - 0.5x - 0.5y), \quad y' = y(-0.25 + 0.5x),$
- (e) $x' = x + y^2, \quad y' = x + y,$
- (f) $x' = 1 - xy, \quad y' = x - y^3,$
- (g) $x' = x - x^2 - xy, \quad y' = 3y - xy - 2y^3,$
- (h) $x' = 1 - y, \quad y' = x^2 - y^2.$

7. Keressen $V(x, y) = ax^2 + cy^2$ alakú Ljapunov-függvényt a következő rendszerekhez, és mutassa meg, hogy az origó adott stabilitási tulajdonságú!

- (a) $x' = -x^3 + xy^2, \quad y' = -2x^2y - y^3, \quad \text{aszimptotikusan stabil,}$
- (b) $x' = -\frac{1}{2}x^3 + 2xy^2, \quad y' = -y^3, \quad \text{aszimptotikusan stabil,}$
- (c) $x' = -x^3 + 2y^3, \quad y' = -2xy^2, \quad \text{stabil,}$
- (d) $x' = x^3 - y^3, \quad y' = 2xy^2 + 4x^2y + 2y^3, \quad \text{instabil.}$