

5. Stabilitáselmélet

5.1. Autonóm nemlineáris rendszerek

Legyen $\mathbf{f}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ekkor az általános elsőrendű explicit nemlineáris differenciálegyenlet-rendszer alakja

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}).$$

A t független változó az alkalmazások nagy részénél az időt jelöli, ezért a differenciálegyenletek elméletében is szokás a t változóról, mint idő változóról beszélni. Ha a fenti egyenlet jobb oldala, azaz az \mathbf{f} függvény nem függ a t változótól, akkor az egyenletet *időfüggetlen* vagy *autonóm* egyenletnek hívjuk. Egy autonóm rendszer általános alakja tehát

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (5.1)$$

ahol $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, vagy általánosabban $\mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, ahol $D \subset \mathbb{R}^n$.

Az egész fejezetben feltesszük, hogy az (5.1) egyenletnek minden

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{z} \quad (5.2)$$

kezdeti értékhez pontosan egy megoldása létezik. (Ehhez elegendő például azt feltenni, hogy \mathbf{f} folytonosan parciálisan differenciálható minden változó szerint.) Ha azt szeretnénk hangsúlyozni, hogy az (5.1) egyenlet egy megoldása az (5.2) kezdeti értékhez tartozik akkor az

$$\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{z})$$

jelölést fogjuk használni. Megoldáson mindig nem folytatható megoldást értünk ebben a fejezetben.

Könnyen megmutatható a következő alapvető eredmény.

5.1. Tétel. Legyen a

$$\mathbf{v}: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{z})$$

függvény a megoldása az (5.1)-(5.2) kezdeti érték feladatnak, $s \in \mathbb{R}$ rögzített. Ekkor a

$$\mathbf{w}: (\alpha - s, \beta - s) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{w}(t) = \mathbf{v}(t + s)$$

függvényre

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{x}(t; t_0 - s; \mathbf{z}),$$

azaz az $\mathbf{w}(t) = \mathbf{v}(t + s)$ az a megoldása az egyenletnek, amely a $t_0 - s$ kezdeti időpontban a \mathbf{z} kezdeti értéket veszi fel.

Bizonyítás: Egyszerű számolással kapjuk

$$\mathbf{w}'(t) = \mathbf{v}'(t + s) = \mathbf{f}(\mathbf{v}(t + s)) = \mathbf{f}(\mathbf{w}(t)), \quad t \in (\alpha - s, \beta - s),$$

továbbá $\mathbf{w}(t_0 - s) = \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{z}$. □

Az előző tétel szerint minden megoldás időeltoltja is megoldása az egyenletnek (csak ha véges intervallumon definiált, akkor az értelmezési tartományuk különböző), és bármely t_0 kezdeti időpontot vissza lehet tolni az origóba egy megfelelő új eltolt időskálát alkalmazva. Ezért feltehető, és az egyszerűség kedvéért fel is tesszük, hogy autonóm egyenleteknél a kezdeti időpont mindig az origóban van megadva. Ekkor a megoldások már csak a kezdeti feltételtől függenek, így az

$$\mathbf{x}(t; \mathbf{z})$$

jelölést fogjuk alkalmazni az (5.1) egyenlet $t_0 = 0$ kezdeti időpontból és a \mathbf{z} kezdeti feltételből indított, maximális intervallumon értelmezett egyértelmű megoldásának jelölésére.

Az (5.1) egyenlet egy $\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}$ konstans megoldását az (5.1) egyenlet *egyensúlyi helyzetének* vagy *kritikus pontjának* hívjuk. Egy konstans megoldás deriváltja az azonosan 0 függvény, így az egyensúlyi helyzetek pontosan \mathbf{f} az függvény gyökei lesznek.

5.2. Tétel. Egy \mathbf{u} konstans vektor akkor és csak akkor egyensúlyi helyzete az (5.1) egyenletnek, ha $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

Egy $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$, $t \in I$ megoldás integrálgörbéjének nevezzük a

$$\{(t, \mathbf{x}(t)) : t \in I\}$$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ térbeli görbét, azaz a megoldás függvény grafikonját. Természetesen a koordinátánkénti $\{(t, x_i(t)) : t \in I\}$ ($i = 1, \dots, n$) integrálgörbét tudjuk geometriailag is ábrázolni, $n > 2$ esetében az integrálgörbét nem tudjuk felrajzolni. Azt az \mathbb{R}^n -beli görbét, amelynek paraméterezése az \mathbf{x} megoldás képlete, azaz az

$$\{\mathbf{x}(t) : t \in I\}$$

\mathbb{R}^n -beli görbét, a megoldás *fázisgörbéjének* vagy *trajektóriájának* hívjuk, az \mathbb{R}^n teret pedig *fázissíknak* is szokás hívni. Két- illetve háromdimenziós esetben tudjuk a fázisgörbét ténylegesen felrajzolni.

5.3. Példa. Tekintsük a

$$v'' + v = 0$$

másodrendű homogén lineáris skaláris differenciálegyenletet. Tudjuk, hogy ennek általános megoldása $v(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$. A skaláris egyenletet rendszer alakra hozhatjuk az $x = v$, $y = v'$ és $\mathbf{x} = (x, y)^T$ változók bevezetésével:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Az egyenlet az

$$\mathbf{x}(0) = (0.5, 0)^T, \quad \mathbf{x}(0) = (1, 0)^T, \quad \mathbf{x}(0) = (0, 1.5)^T, \quad \mathbf{x}(0) = (0, 2)^T$$

kezdeti feltételből indítva oldottuk meg. A megoldások komponensenkénti integrálgörbéi az 5.1. és 5.2. Ábrán láthatók. Például az $\mathbf{x}(0) = (1, 0)^T$ kezdeti feltételhez tartozó megoldás $\mathbf{x}(t) = (\cos t, -\sin t)^T$. Ennek a fázisgörbéjének a paraméteres egyenlete tehát

$$x = \cos t, \quad y = -\sin t,$$

amely egy egységsugarú kör, hiszen

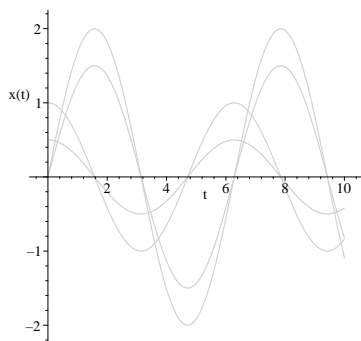
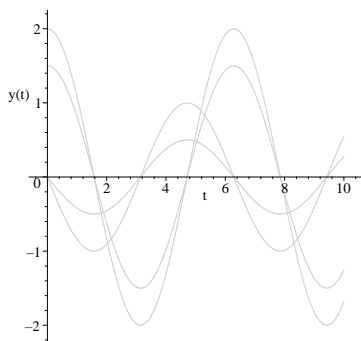
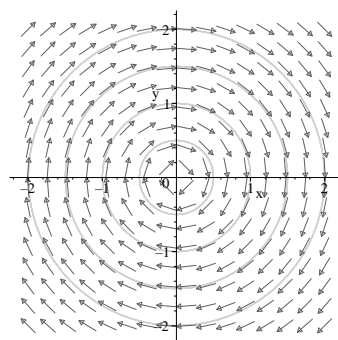
$$x^2 + y^2 = 1$$

teljesül a görbe mentén. Most számítsuk ki az $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ és $y = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$ általános megoldás esetében is az $x^2 + y^2$ értékét:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (c_1 \cos t + c_2 \sin t)^2 + (-c_1 \sin t + c_2 \cos t)^2 \\ &= c_1^2 \cos^2 t + c_2^2 \sin^2 t + 2c_1 c_2 \cos t \sin t + c_1^2 \sin^2 t + c_2^2 \cos^2 t - 2c_1 c_2 \cos t \sin t \\ &= c_1^2 + c_2^2. \end{aligned}$$

Azaz ebben az esetben is a trajektória egy origó középpontú, $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ sugarú kör. Lásd az 5.3. Ábrát, ahol a négy fázisgörbével (origó középpontú körök) együtt az egyenlet iránymezőjét is ábráztuk. Látható, hogy a fázisgörbék símulnak az iránymezőhöz.

□

5.1. Ábra. $x(t)$ 5.2. Ábra. $y(t)$ 

5.3. Ábra. fázissík

5.4. Tétel. *Egy autonóm rendszer különböző trajektóriái nem metszik egymást.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az (5.1) egyenlet két trajektóriája metszi egymást. Legyen az egyik görbe paraméterezése $\mathbf{w}^{(1)}$, a másiké pedig $\mathbf{w}^{(2)}$. Ekkor létezik két olyan paraméterérték, t_1 és t_2 (az egyes görbék paraméterezései értelmezési tartományából), hogy $\mathbf{w}^{(1)}(t_1) = \mathbf{w}^{(2)}(t_2)$. Definiáljuk a $\mathbf{v}(t) = \mathbf{w}^{(2)}(t + t_2 - t_1)$ függvényt. Az 5.1. Tétel szerint \mathbf{v} is megoldása az (5.1) egyenletnek, továbbá $\mathbf{v}(t_1) = \mathbf{w}^{(2)}(t_1 + t_2 - t_1) = \mathbf{w}^{(1)}(t_1)$. De ekkor, mivel a t_1 időpontban a két megoldás értéke azonos, így a fejezet elején kimondott feltétel szerint a két megoldás azonos kell legyen, azaz $\mathbf{v}(t) = \mathbf{w}^{(1)}(t)$ minden t -re. De ekkor a $\mathbf{w}^{(1)}$ és $\mathbf{w}^{(2)}$ grafikonjai azonosak, nem csak egy pontban metszik egymást. \square

Megmutatható a következő állítás.

5.5. Tétel. *Egy autonóm rendszer bármely trajektóriája vagy*

- (a) *önmagát át nem metsző görbe (azaz egyszerű görbe) vagy*
- (b) *egyszerű zárt görbe vagy*
- (c) *egy pont.*

Egy trajektória pontosan akkor egy pont, ha az egy egyensúlyi helyzet trajektóriája, és egyszerű zárt görbe trajektóriája pontosan a periodikus megoldásoknak van.

5.6. Tétel. *Ha (5.1) egy \mathbf{x} megoldására a*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{u} \quad (\text{vagy } \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{u})$$

véges határérték létezik, akkor \mathbf{u} egyensúlyi helyzete az (5.1) egyenletnek.

Bizonyítás: A feltétel szerint

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}'(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{u}).$$

Használjuk a szokásos $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ és $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))^T$ jelöléseket. Legyen $1 \leq i \leq n$ rögzített, és tegyük fel, hogy $f_i(\mathbf{u}) > 0$. Ekkor legyen $0 < A < f_i(\mathbf{u})$ tetszőleges. A határérték létezése miatt A -hoz létezik olyan $T > 0$, hogy $x_i'(t) = f_i(\mathbf{x}(t)) > A$, ha $t \geq T$. Ezért

$$x_i(t) \geq x_i(T) + A(t - T), \quad t \geq T,$$

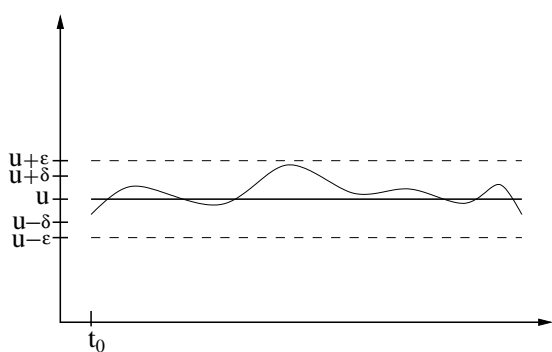
ami ellentmond annak, hogy x_i -nek véges határértéke van, ha $t \rightarrow \infty$. Ugyanígy kapható ellentmondás akkor is, ha azt tesszük fel, hogy $f_i(\mathbf{u}) < 0$. Tehát $f_i(\mathbf{u}) = 0$ kell legyen minden i -re, azaz \mathbf{u} egyensúlyi helyzet. (A $-\infty$ -ben vett határérték esete ugyanígy bizonyítható.) \square

5.2. Stabilitási fogalmak

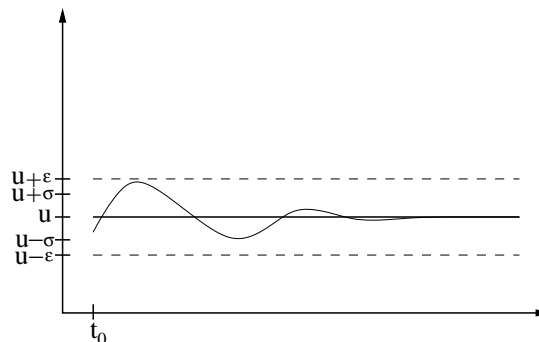
Legyen $\|\cdot\|$ az euklideszi norma \mathbb{R}^n -en. (De bármely más normát is használhatunk, hiszen, mint tudjuk, a normák ekvivalensek \mathbb{R}^n -en.)

Legyen \mathbf{u} egy rögzített egyensúlyi helyzete az (5.1) egyenletnek. Az \mathbf{u} egyensúlyi helyzetet *stabilnak* nevezzük, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $\|\mathbf{z} - \mathbf{u}\| < \delta$, akkor $\|\mathbf{x}(t; \mathbf{z}) - \mathbf{u}\| < \varepsilon$ teljesül minden $t \geq 0$ -ra. Az \mathbf{u} egyensúlyi helyzetet *instabilnak* nevezzük, ha nem stabil.

Az \mathbf{u} egyensúlyi helyzetet *aszimptotikusan stabilnak* nevezzük, ha stabil, továbbá létezik olyan $\sigma > 0$, hogy ha $\|\mathbf{z} - \mathbf{u}\| < \sigma$, akkor $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t; \mathbf{z}) = \mathbf{u}$ teljesül.



5.4. Ábra. stabil egyensúlyi helyzet



5.5. Ábra. aszimptotikusan stabil egyensúlyi helyzet

Egy stabil egyensúlyi helyzet tehát olyan, hogy az egyenlet megoldásai tetszőlegesen közel maradnak az egyensúlyi helyzethez, feltéve, hogy az egyensúlyi helyzethez elegendően közel indítottuk a rendszert (lásd az 5.4. Ábrát). Az aszimptotikusan stabil egyensúlyi helyzet közeléből indított megoldások ezen kívül még az egyensúlyi helyzethez is tartanak (lásd az 5.5. Ábrát).

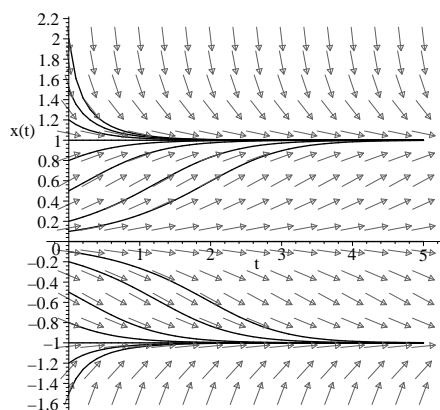
5.7. Példa. Tekintsük az

$$x' = x - x^3$$

elsőrendű homogén lineáris skaláris differenciálegyenletet. Ennek három egyensúlyi helyzete van: $u = 0, 1$ és -1 , az $u - u^3 = 0$ egyenlet gyökei. Az 5.6. Ábrában kirajzoltuk az egyenlet néhány kezdeti értékhez tartozó megoldásának integrálgörbéit, valamint az egyenlet egy iránymezőjét is. (A vízszintes tengely a t -tengely, a függőleges pedig az x -tengely.) Látható, hogy a $0, 1$ és -1 kezdeti értékekhez konstans megoldások tartoznak. Minden az $x = 0$ és $x = 1$ egyenesek közötti ponton átmenő megoldás érintőjének meredeksége pozitív, azaz ebben a sávban a megoldások mind monoton nőnek. (Megmutatható az is, ahogy azt az ábrából látjuk is, hogy minden megoldás ebben a sávban 1 -hez tart. Az $x = 1$ egyenes feletti sávban pedig minden megoldás monoton csökkenve tart 1 -hez. Az $x = 0$ és $x = -1$ egyenes közötti sávban a megoldások -1 -hez tartanak, $x = -1$ alatt pedig minden megoldás -1 -hez tart. Ebből következik, hogy az origó instabil, hiszen bármely közel is indítjuk a megoldást 0 -hoz, a megoldás vagy 1 -hez vagy -1 -hez fog tartani, azaz nem marad az origó kis környezetén belül. Az 1 és a -1 egyensúlyi helyzetek pedig aszimptotikusan stabilak.

□

5.8. Példa. Tekintsük újra az 5.3. Példában vizsgált 2×2 -es rendszert, amelynek trajektóriái az 5.3. Ábrán láthatók. A rendszernek egy egyensúlyi helyzete van, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Ez stabil, hiszen az 5.3. Ábrából látható, hogy bármely $\varepsilon > 0$ sugarú környezetét vesszük az origónak, akkor a $\delta = \varepsilon$ sugarú környezetén belül indított trajektóriák ugyanezen környezeten belül maradnak, mivel minden trajektória kör. Az egyensúlyi helyzet viszont nem aszimptotikusan stabil, hiszen

5.6. Ábra. $x(t)$

a trajektóriák nem tartanak az origóhoz. A stabilitás az 5.1. és az 5.2. Ábrából is látható, hiszen a megoldás $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ és $y(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$, amelynek amplitúdója $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, ami pedig pont

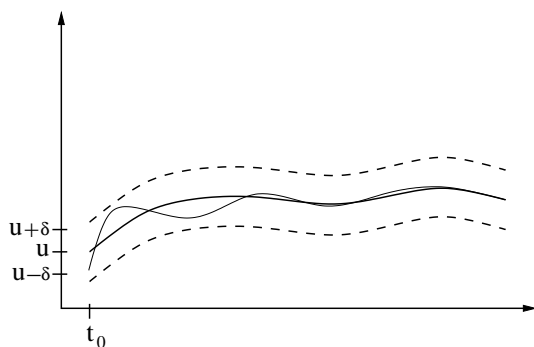
$$\|\mathbf{x}(0)\| = \|(x(0), y(0))\| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}.$$

□

Az egyensúlyi helyzet stabilitásához hasonlóan egy tetszőleges megoldás stabilitását is definiálhatjuk.

Azt mondjuk, hogy az (5.1) egyenlet $\mathbf{x}(t; \mathbf{u})$ megoldása *stabil*, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $\|\mathbf{z} - \mathbf{u}\| < \delta$, akkor $\|\mathbf{x}(t; \mathbf{z}) - \mathbf{x}(t; \mathbf{u})\| < \varepsilon$ teljesül minden $t \geq 0$ -ra. Az $\mathbf{x}(t; \mathbf{u})$ megoldást *instabilnak* nevezzük, ha nem stabil.

Az $\mathbf{x}(t; \mathbf{u})$ megoldást *aszimptotikusan stabilnak* nevezzük, ha stabil, továbbá létezik olyan $\sigma > 0$, hogy ha $\|\mathbf{z} - \mathbf{u}\| < \sigma$, akkor $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t; \mathbf{z}) - \mathbf{x}(t; \mathbf{u})\| = 0$ teljesül.



5.7. Ábra. stabil megoldás

5.8. Ábra. aszimptotikusan stabil megoldás

Az ebben a szakaszban definiált stabilitási fogalmakat Ljapunov-féle stabilitásnak is szokták nevezni, hogy megkülönböztessék őket az irodalomban használt több tucat egyéb stabilitási fogalomtól.

Ki lehet terjeszteni a Ljapunov-féle stabilitás, instabilitás és aszimptotikus stabilitás definícióját nemautonóm egyenletekre is, de ezzel itt nem foglalkozunk.

5.3. Kétdimenziós autonóm homogén lineáris rendszerek egyensúlyi helyzetei

Tekintsük az

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (5.3)$$

autonóm homogén lineáris rendszert, ahol \mathbf{A} egy 2×2 -es invertálható mátrix. Ekkor a rendszernek az $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ az egyetlen egyensúlyi helyzete. Lineáris algebrából ismert, hogy \mathbf{A} pontosan akkor invertálható, ha 0 nem sajátértéke \mathbf{A} -nak.

Tekintsünk egy \mathbf{T} 2×2 -es invertálható mátrixot, és vezessük be az $\mathbf{y} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$ új változót. Ekkor

$$\mathbf{y}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{y},$$

azaz \mathbf{y} megoldása az

$$\mathbf{y}' = \mathbf{B}\mathbf{y} \quad (5.4)$$

homogén lineáris egyenletnek, ahol $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ az \mathbf{A} mátrixhoz hasonló mátrix. Lineáris algebrából ismert, hogy \mathbf{A} és \mathbf{B} sajátértékei megegyeznek. Ha az \mathbf{y} megoldás ismert, akkor azt az $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$ képlettel lehet visszatranszformálni. Ez egy invertálható lineáris transzformáció, amely, mint azt lineáris algebrából tudjuk, geometriailag origó középpontú nyújtások, forgatások, tükrözés egymás utáni alkalmazását jelenti. A célunk ebben a szakaszban az (5.3) egyenlet trajektóriáinak ábrázolása, amelyet a fenti számolás szerint az (5.4), egyszerűbb alakra hozott egyenlet trajektóriáinak visszatranszformálásából kapunk majd meg.

Teljesül a következő tétel.

5.9. Tétel. *Legyen \mathbf{A} egy 2×2 -es invertálható mátrix. Ekkor \mathbf{A} hasonló a következő mátrixok valamelyikéhez:*

1. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, ahol λ_1 és λ_2 az \mathbf{A} mátrix (nem feltétlenül különböző) valós sajátértékei, és ha $\lambda_1 = \lambda_2$, akkor λ_1 geometriai multiplicitása 2.
2. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$, ahol $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ kétszeres algebrai multiplicitású sajátértéke \mathbf{A} -nak, amelynek geometriai multiplicitása 1.
3. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, ahol \mathbf{A} sajátértékei $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

Legyen λ_1 és λ_2 az \mathbf{A} két sajátértéke. Hat esetet különböztetünk meg.

1. eset: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ azonos előjelű valós sajátértékei \mathbf{A} -nak.

Ekkor az 5.9. Tétel szerint az \mathbf{A} mátrix hasonló a

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

mátrixhoz. A megfelelő (5.4) egyenletet koordinátánként kiírva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} y_1' &= \lambda_1 y_1 \\ y_2' &= \lambda_2 y_2, \end{aligned}$$

amely egymástól független két egyenletre redukálódik, és amelynek megoldása

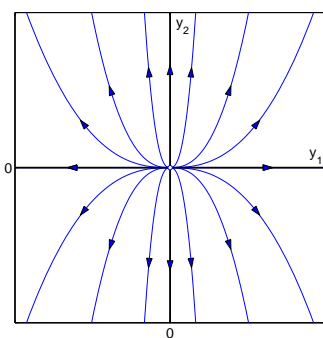
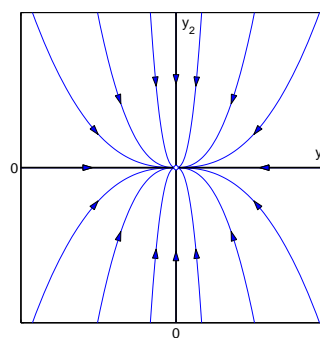
$$y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} \quad \text{és} \quad y_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (5.5)$$

Ha $c_1 = 0$ és $c_2 = 0$, akkor az egy pontból, az origóból álló speciális trajektóriát kapjuk. Ha $c_1 = 0$, de $c_2 \neq 0$, akkor az (5.5) egyenlet az y_2 -tengely pozitív ill. negatív féltengelyének paraméteres előállítását, attól függően, hogy $c_2 > 0$ vagy $c_2 < 0$. Hasonlóan, ha $c_2 = 0$, de $c_1 \neq 0$,

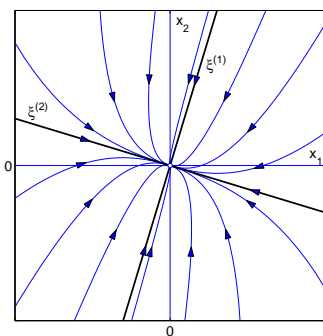
akkor az y_1 -tengely két féltengelye közül az egyiket kapjuk vissza az (5.5) paraméterezéssel. Ha sem c_1 sem c_2 nem 0, akkor pedig (5.5) egy pozitív kitevős hatványfüggvény paraméteres előállítására, hiszen ekkor

$$y_2 = ky_1^s, \quad \text{ahol } k = \frac{c_2}{c_1^s}, \quad s = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \quad (5.6)$$

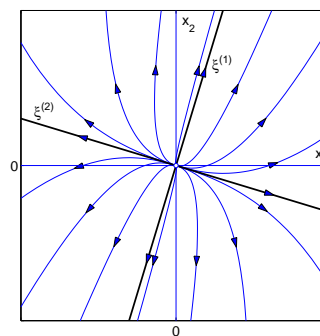
Az ilyen görbék grafikonja az 5.9. ill. az 5.10. Ábrán láthatók. Ha $s > 1$, akkor a görbék az y_1 -tengelyhez símulnak (az ábrákon ez az eset látható), ha pedig $0 < s < 1$, akkor pedig az y_2 -tengelyhez. Az (5.5) paraméterezés meghatároz egy irányítást a görbéken. Könnyen ellenőrizhető, hogy ha $\lambda_1 > 0$ és $\lambda_2 > 0$, akkor minden görbe irányítása olyan, hogy ahogy az idő, azaz t növekszik, a pont a görbe mentén az origótól eltávolodik (lásd az 5.9. Ábrát), ha pedig $\lambda_1 < 0$ és $\lambda_2 < 0$, akkor a mozgás során a pont az origó fele tart (lásd az 5.10. Ábrát). Ezért a $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ esetben az origó instabil, a $\lambda_1 < 0$ és $\lambda_2 < 0$ esetben pedig az origó aszimptotikusan stabil.

5.9. Ábra. $\lambda_1 > 0$ és $\lambda_2 > 0$ 5.10. Ábra. $\lambda_1 < 0$ és $\lambda_2 < 0$

Az (5.3) egyenlet megoldásainak trajektóriái ekkor az 5.11. és 5.12. Ábrán látható módon néznek ki. Az y_1 - és y_2 -tengelyek a \mathbf{T} transzformáció során a $\xi^{(1)}$ és $\xi^{(2)}$ vektorokon és az origón átmenő egyenesekbe kerülnek, és a többi görbe is deformálódik a lineáris transzformáció során, de megtartják azt a tulajdonságot, hogy a $\xi^{(1)}$ -hez vagy $\xi^{(2)}$ -höz tartozó egyenest érintik, és azt is, hogy $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ esetben az origó instabil, a $\lambda_1 < 0$ és $\lambda_2 < 0$ esetben pedig az origó aszimptotikusan stabil. Olyan egyensúlyi helyzetet, amelynek trajektóriái az 5.11. Ábrán látható alakúak, *instabil csomópontnak*, az 5.12. Ábra esetén pedig *aszimptotikusan stabil csomópontnak* nevezzük.



5.11. Ábra. instabil csomópont



5.12. Ábra. aszimptotikusan stabil csomópont

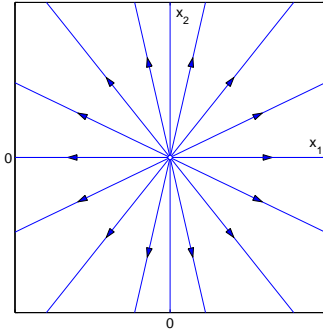
2. eset: $\lambda_1 = \lambda_2$ azonos előjelű valós sajátértékei \mathbf{A} -nak, amelynek geometriai multipllicitása 2.

Az (5.4) egyenlet megoldásának képlete ebben az esetben is (5.5), de most ez a paraméterezés nem csak a $c_1 = 0$ vagy $c_2 = 0$ esetben definiál egyenest, hanem a $c_1 \neq 0$ és $c_2 \neq 0$ esetben is,

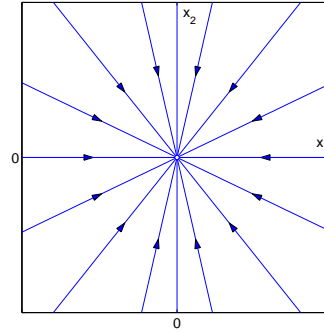
hiszen most

$$y_2 = \frac{c_2}{c_1} y_1.$$

Ezért minden (nem azonosan nulla) megoldás trajektóriája az origóból induló félegyenes. De ekkor ezeknek a \mathbf{T} lineáris transzformációval vett képe is origóból induló félegyenes lesz (lásd az 5.13. és 5.14. Ábrákat). Ebben az esetben is *csomópontnak* nevezzük az egyensúlyi helyzetet, amely instabil, ha $\lambda_1 > 0$, ill. aszimptotikusan stabil, ha $\lambda_1 < 0$. Ebben az esetben a sajátvektoroknak nincs kitüntetett szerepük az ábrában (minden vektor egyébként sajátvektor).



5.13. Ábra. instabil csomópont



5.14. Ábra. aszimptotikusan stabil csomópont

3. eset: $\lambda_1 = \lambda_2$ valós sajátértékei \mathbf{A} -nak, amelynek geometriai multiplicitása 1.

Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy az (5.4) egyenlet megoldása

$$y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t}, \quad y_2 = c_2 e^{\lambda_1 t},$$

azaz vektoriális alakban

$$\mathbf{y} = e^{\lambda_1 t} \left[\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

Ez $c_2 = 0$ -ra és $c_1 \neq 0$ -ra az y_1 -tengely valamelyik féltengelyét állítja elő. Egyébként \mathbf{y} a

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} c_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

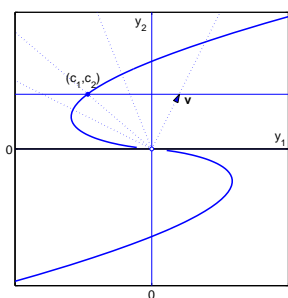
vektor $e^{\lambda_1 t}$ -szorososa. A $\mathbf{v}(t)$ vektor grafikonja egy az y_1 -tengellyel párhuzamos egyenes. (Az 5.15. Ábrán a (c_1, c_2) ponton átmenő vízszintes egyenes.) Ezért minden origóból induló félegyenes egy pontban metszi a trajektóriát. Ellenőrizhető, hogy az \mathbf{y} megoldás trajektóriája az 5.15. Ábrán látható görbe lesz, amely érinti az y_1 -tengelyt az origóban.

Az (5.3) egyenlet trajektóriáit az (5.4) egyenlet trajektóriáinak lineáris deformációjával kapjuk, ahol az y_1 -tengely képe a $\xi^{(1)}$ vektoron átmenő egyenes lesz. Az egyensúlyi helyzetet *elfajult csomópontnak* hívjuk. Ez lehet instabil, ha $\lambda_1 > 0$, illetve aszimptotikusan stabil, ha $\lambda_1 < 0$.

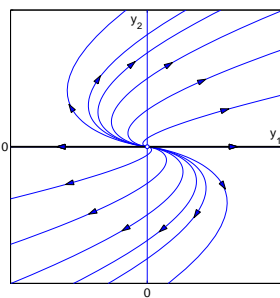
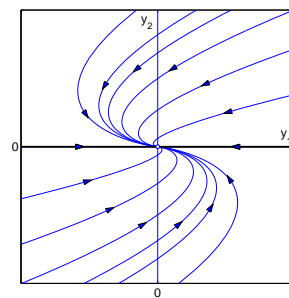
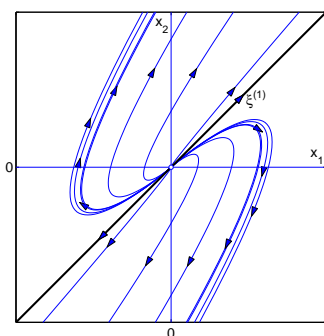
4. eset: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ellentétes előjelű valós sajátértékei \mathbf{A} -nak.

Az (5.4) egyenlet megoldásának képlete most is (5.5), így most is van két egyenes, pontosabban négy félegyenes a trajektóriák között (a $c_1 = 0$ vagy $c_2 = 0$ esetén). A többi trajektória egyenlete most is (5.6), de ebben az esetben $s < 0$, ezért a trajektóriák alakja „hiperbolaszzerű”, ahogy az az 5.20. Ábrán látható. A pozitív sajátértékhez tartozó egyenes irányítása az origóból kifelé, a negatív sajátértékhez tartozó egyenesen pedig az origó felé mutat, a többi trajektória pedig illeszkedik ezekhez az irányokhoz.

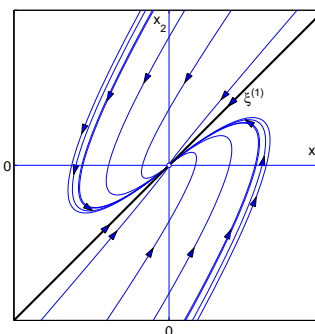
Az (5.3) egyenlet trajektóriáit a \mathbf{T} lineáris leképezést az 5.20. Ábrára alkalmazva kapjuk. Az y_1 - és y_2 -tengelyek ismét a $\xi^{(1)}$ ill. $\xi^{(2)}$ sajátvektorokon átmenő egyenesekbe transzformálódnak,



5.15. Ábra.

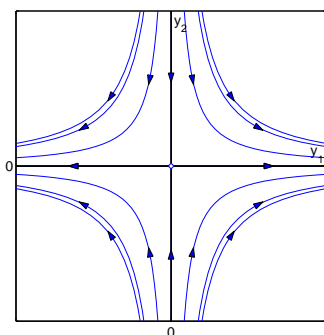
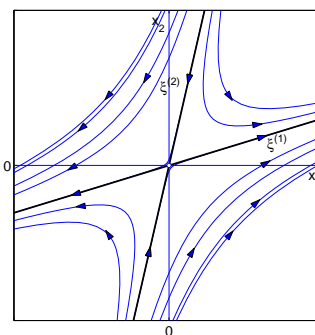
5.16. Ábra. $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ 5.17. Ábra. $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ 

5.18. Ábra. instabil elfajult csomópont



5.19. Ábra. aszimptotikusan stabil elfajult csomópont

és a görbék pedig ennek megfelelően deformálódnak. A pozitív sajátértékhez tartozó egyenest, azaz a sajátérték sajátalterét *instabil altérnek*, a negatív sajátérték sajátalterét pedig *stabil altérnek* nevezzük. Látható, hogy minden görbe trajektória az idő növekedésével a stabil altérhez, illetve $t \rightarrow -\infty$ esetén az instabil altérhez konvergál. Ebben az esetben az egyensúlyi helyzetet *nyeregpontnak* hívjuk. Egy nyeregpont mindig instabil egyensúlyi helyzet, hiszen az origó bármely környezetéből vett pontból induló megoldások – a stabil altér elhelyezkedő pontok és az origó kivételével – tetszőlegesen távol kerülnek az origótól.

5.20. Ábra. $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ 

5.21. Ábra. nyeregpont, instabil

5. eset: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ($\alpha \neq 0$) **komplex sajátértékei A-nak.**

Ekkor az 5.9. Tétel szerint az (5.4) egyenlet alakja

$$\begin{aligned} y_1' &= \alpha y_1 + \beta y_2 \\ y_2' &= -\beta y_1 + \alpha y_2. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Az (y_1, y_2) pontnak tekintsük a polár koordinátáit, (r, θ) -t. Ekkor

$$r^2 = y_1^2 + y_2^2 \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y_2}{y_1}.$$

Az első egyenlet mindkét oldalát differenciálva és az (5.7) összefüggéseket felhasználva kapjuk

$$2rr' = 2y_1y_1' + 2y_2y_2' = 2y_1(\alpha y_1 + \beta y_2) + 2y_2(-\beta y_1 + \alpha y_2) = 2\alpha(y_1^2 + y_2^2) = 2\alpha r^2,$$

azaz a mozgás során $r' = \alpha r$ teljesül, ezért

$$r = c_1 e^{\alpha t}.$$

A pont távolsága az origótól a mozgás során exponenciálisan növekszik, ha $\alpha > 0$, és exponenciálisan csökkenve 0-hoz tart, ha $\alpha < 0$.

A θ -ra vonatkozó egyenletet differenciálva hasonló módon kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 \theta} \theta' &= \frac{y_2' y_1 - y_1' y_2}{y_1^2} \\ &= \frac{(-\beta y_1 + \alpha y_2) y_1 - (\alpha y_1 + \beta y_2) y_2}{y_1^2} \\ &= -\beta \frac{y_1^2 + y_2^2}{y_1^2} \\ &= -\beta \frac{r^2}{y_1^2}, \end{aligned}$$

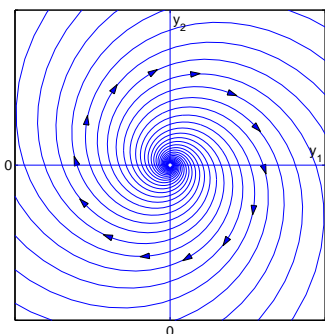
amiből

$$\theta' = -\beta,$$

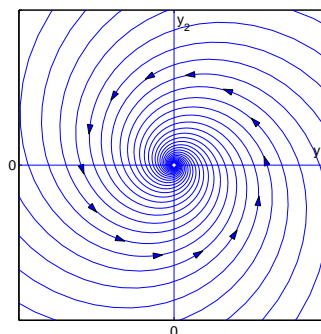
és ezért

$$\theta = -\beta t + \theta_0.$$

A mozgás során ezért a pont a trajektórián egyenes sebességgel forog az origó körül. Ebből következik, hogy a trajektóriák alakja spirál görbe, lásd az 5.22. és 5.23. Ábrát.



5.22. Ábra. $\lambda = \alpha \pm i\beta$, $\alpha > 0$



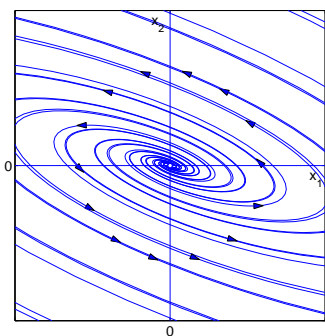
5.23. Ábra. $\lambda = \alpha \pm i\beta$, $\alpha < 0$

A **T** lineáris transzformációt alkalmazva a görbékre az 5.24. és 5.25. Ábrán látható görbékot kapjuk. Az egyensúlyi helyzet neve ebben az esetben *fókusz*, amely lehet instabil, ha $\alpha > 0$, illetve aszimptotikusan stabil, ha $\alpha < 0$.

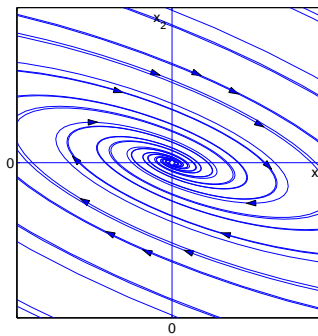
6. eset: $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ komplex sajátértékei **A**-nak.

Az előző pontban vett r és θ képletének levezetése az $\alpha = 0$ esetre ugyanúgy érvényes, így kapjuk, hogy az (5.4) egyenlet trajektóriái origó középpontú körök (5.26. Ábra).

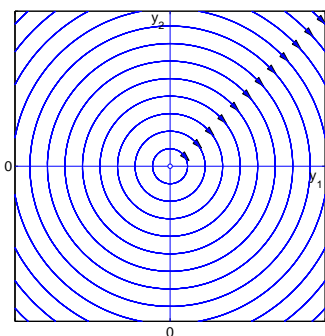
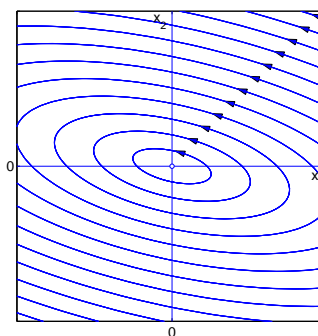
Lineáris transzformáció a köröket ellipszisbe visz át, ahogy azt az 5.27. Ábrán láthatjuk. Az egyensúlyi helyzet neve *centrum*. Egy centrum mindig stabil, de nem aszimptotikusan stabil.



5.24. Ábra. instabil fókusz



5.25. Ábra. aszimptotikusan stabil fókusz

5.26. Ábra. $\lambda = \pm i\beta$ 

5.27. Ábra. centrum, stabil

5.4. Lineáris rendszerek stabilitása

Tekintsük az

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \quad (5.8)$$

homogén lineáris egyenletet. Az egyenletnek $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzete (azaz az azonosan $\mathbf{0}$ függvény megoldása az egyenletnek), és ha feltesszük, hogy az $\mathbf{A}(t)$ mátrix minden t -re invertálható, akkor az egyenletnek nincs is több egyensúlyi helyzete.

5.10. Tétel. Az (5.8) egyenlet $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzete

- (a) akkor és csak akkor stabil, ha az (5.8) egyenlet minden megoldása korlátos;
 (b) akkor és csak akkor aszimptotikusan stabil, ha az (5.8) egyenlet minden \mathbf{x} megoldására

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}.$$

Tekintsük most az (5.8) speciális esetét, tegyük fel, hogy az együttható konstans mátrix, azaz tekintsük az

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (5.9)$$

egyenletet. Ebben az esetben az $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzet stabilitását az együtthatómátrix sajátértékei meghatározzák.

5.11. Tétel. Legyen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ az $n \times n$ -es \mathbf{A} mátrix sajátértékei. Ekkor az (5.9) egyenlet $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzete

(a) akkor és csak akkor stabil, ha

$$\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

és ha valamely sajátértékre $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$, akkor λ_i geometriai multiplicitása megegyezik az algebrai multiplicitásával;

(b) akkor és csak akkor aszimptotikusan stabil, ha

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Néhány speciális esetben az együtthatók ismeretében (a sajátértékek kiszámítása nélkül) eldönthető a rendszer aszimptotikus stabilitása.

5.12. Tétel. Legyen $\mathbf{A} = (a_{ij})$ $n \times n$ -es mátrix, amelyre

$$a_{ii} < 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ekkor ha az \mathbf{A} mátrix soronként diagonálisan domináns, azaz

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n,$$

vagy ha \mathbf{A} oszloponként diagonálisan domináns, azaz

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|, \quad j = 1, \dots, n,$$

akkor az (5.9) egyenlet $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzete aszimptotikusan stabil.

5.5. Nemlineáris rendszerek egyensúlyi helyzetének stabilitása

Tekintsük az

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (5.10)$$

ú.n. kvázilineáris egyenletet, ahol feltesszük, hogy $\mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ és

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0. \quad (5.11)$$

Az első feltételből következik, hogy $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzete az (5.10) egyenletnek. A második feltétel azt jelenti, hogy a \mathbf{g} függvény már csak lineárisnál nagyobb rendű tagokat tartalmaz.

Az (5.10) egyenletben a nemlineáris tagokat, azaz a \mathbf{g} függvényt elhagyva kapjuk az egyenlet ú.n. linearizált egyenletét:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}. \quad (5.12)$$

A következő tétel szerint az (5.10) egyenlet $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzetének aszimptotikus stabilitására illetve instabilitására következtetni tudunk az linearizált egyenlet $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzetének stabilitási tulajdonságából.

5.13. Tétel. Ha az (5.12) linearizált egyenlet $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzete aszimptotikusan stabil, akkor az (5.10) egyenlet $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzete is aszimptotikusan stabil.

Ha az (5.12) linearizált egyenlet $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzete instabil, akkor az (5.10) egyenlet $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzete is instabil.

Ha az (5.12) linearizált egyenlet $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzete stabil, akkor ebből nem tudunk következtetni az (5.10) egyenlet $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzete stabilitási tulajdonságára: a nemlineáris egyenlet egyensúlyi helyzete lehet aszimptotikusan stabil, instabil vagy stabil is.

Kétdimenziós esetben a linearizált egyenlet trajektóriáinak alakját fel tudjuk rajzolni. Megmutatható, hogy a nemlineáris egyenlet trajektóriái az egyensúlyi helyzet kis környezetében a lineáris egyenlet trajektóriáinak (nemlineáris) deformációjával kaphatók meg. Így az ábrák hasonlítanak a lineáris egyenlet trajektóriáira, csak pl. a csomópontok esetében a két egyenes is görbe trajektóriákba deformálódik.

5.14. Példa. Határozzuk meg az

$$\begin{aligned}x' &= x + y - 2xy \\y' &= 4x + y + x^2\end{aligned}$$

egyenlet $(0, 0)$ egyensúlyi helyzetének stabilitását!

Az egyenletben szereplő nemlineáris tagok

$$\mathbf{g}(x, y) = \begin{pmatrix} -2xy \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Erre teljesül az (5.11) feltétel, hiszen $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ polár koordinátákra áttérve

$$\begin{aligned}\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(-2xy)^2 + x^4}{x^2 + y^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{4r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + r^4 \cos^4 \theta}{r^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} r^2 (4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \cos^4 \theta) = 0.\end{aligned}$$

A megfelelő linearizált egyenlet

$$\begin{aligned}x' &= x + y \\y' &= 4x + y.\end{aligned}$$

Az

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

együtthatómátrix sajátértékei 3 és -1 , így a linearizált egyenlet egyensúlyi helyzete egy nyereg-pont, amely instabil egyensúlyi helyzet. Ebből következik, hogy a nemlineáris egyenlet $(0, 0)$ egyensúlyi helyzete is instabil. \square

Tekintsük most az általános

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{5.13}$$

nemlineáris egyenletet, ahol legyen \mathbf{u} az egyenlet egy tetszőlegesen rögzített trajektóriája. Azt vizsgáljuk, hogy az egyensúlyi helyzet közeléből indított \mathbf{x} megoldásokra az $\mathbf{x} - \mathbf{u}$ különbség hogyan változik a mozgás során. Vezessük be ezért az

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{u}$$

új változót. Ekkor, használva hogy \mathbf{u} konstans vektor, \mathbf{y} teljesíti az

$$\mathbf{y}' = \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{y} + \mathbf{u})$$

differenciálegyenletet. Vegyük az \mathbf{f} függvény lineáris Taylor-közelítését \mathbf{u} körül, ahol a hibatagot jelölje \mathbf{g} :

$$\mathbf{f}(\mathbf{y} + \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}'(\mathbf{u})\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y})$$

Itt \mathbf{f}' az \mathbf{f} függvény Jacobi-mátrixát jelöli, azaz azt az $n \times n$ -es mátrixot, amelyben az i -edik sor j -edik eleme az \mathbf{f} i -edik komponensfüggvényének a j -edik változó szerinti parciális deriváltja.

Mivel \mathbf{u} egyensúlyi helyzet, ezért $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, így az

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}'(\mathbf{u})\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y})$$

egyenletet kapjuk. Ez kvázilineáris egyenlet, ezért az 5.13. Tételt alkalmazva kapjuk a következő eredményt.

5.15. Tétel. *Legyen \mathbf{u} egy egyensúlyi helyzete az (5.13) egyenletnek. Ekkor ha az*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}'(\mathbf{u})\mathbf{y}$$

linearizált egyenlet $\mathbf{0}$ egyensúlyi helyzete aszimptotikusan stabilis, akkor az (5.13) egyenlet \mathbf{u} egyensúlyi helyzete is az, illetve ha a linearizált egyenlet egyensúlyi helyzete instabil, akkor a nemlineáris egyenlet egyensúlyi helyzete is az.

5.16. Példa. Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} x' &= x(3 - 2x - y) \\ y' &= y(2 - x - y) \end{aligned}$$

egyenlet egyensúlyi helyzetait és azok stabilitását!

Az egyensúlyi helyzeteket az

$$\begin{aligned} x(3 - 2x - y) &= 0 \\ y(2 - x - y) &= 0 \end{aligned}$$

algebrai egyenletrendszer megoldásai adják. Négy esetet különböztetünk meg:

1. $x = 0$ és $y = 0$, azaz $(0, 0)$ az egyik egyensúlyi helyzet.
2. $x = 0$ és $2 - x - y = 0$. Ennek megoldása $(0, 2)$.
3. $3 - 2x - y = 0$ és $y = 0$. Ehhez tartozó egyensúlyi helyzet $(1.5, 0)$.
4. $3 - 2x - y$ és $2 - x - y = 0$. Ennek megoldása $(1, 1)$.

Az egyenlet jobb oldalát leíró függvény

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 3x - 2x^2 - xy \\ 2y - xy - y^2 \end{pmatrix},$$

és ennek Jacobi-mátrixa

$$\mathbf{f}'(x, y) = \begin{pmatrix} 3 - 4x - y & -x \\ -y & 2 - x - 2y \end{pmatrix}.$$

Nézzük az egyes egyensúlyi helyzeteket.

1. $(0, 0)$. Ebben a pontban

$$\mathbf{f}'(0, 0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

amelynek sajátértékei a főátlóban álló számok, 3 és 2, hiszen a mátrix diagonális. Ezért a linearizált egyenlet egyensúlyi helyzete egy instabil csomópont, és így a nemlineáris egyenlet $(0, 0)$ egyensúlyi helyzete is instabil.

2. $(0, 2)$. Ebben a pontban

$$\mathbf{f}'(0, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},$$

amelynek sajátértékei a főátlóban álló számok, 1 és -2 , hiszen a mátrix alsó háromszög mátrix. Ezért a linearizált egyenlet egyensúlyi helyzete egy instabil nyeregpont, és így a nemlineáris egyenlet $(0, 2)$ egyensúlyi helyzete is instabil.

3. $(1.5, 0)$. Ebben a pontban

$$\mathbf{f}'(1.5, 0) = \begin{pmatrix} -3 & -1.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix},$$

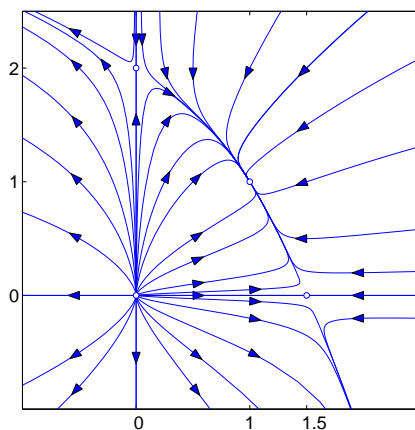
amelynek sajátértékei a főátlóban álló számok, -3 és 0.5 , hiszen a mátrix felső háromszög mátrix. Ezért a linearizált egyenlet egyensúlyi helyzete egy instabil nyeregpont, és így a nemlineáris egyenlet $(1.5, 0)$ egyensúlyi helyzete is instabil.

4. $(1, 1)$. Ebben a pontban

$$\mathbf{f}'(1, 1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

amelynek sajátértékei, $\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Ezért a linearizált egyenlet egyensúlyi helyzete aszimptotikusan stabil csomópont, és így a nemlineáris egyenlet $(1, 1)$ egyensúlyi helyzete is aszimptotikusan stabil.

Az 5.28. Ábrában láthatók a nemlineáris rendszer trajektóriái. Látható, hogy az egyes egyensúlyi helyzetek kis környezetében a megoldások trajektóriáinak alakjai hasonlítanak a linearizált egyenlet trajektóriáira. \square



5.28. Ábra. nemlineáris rendszer trajektóriái

5.6. Ljapunov-függvények

Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, amelyre $\mathbf{0} \in U$. Egy $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt *pozitív (negatív) definitnek* nevezünk, ha

$$V(\mathbf{0}) = 0 \quad \text{és} \quad V(\mathbf{x}) > 0 \quad (V(\mathbf{x}) < 0) \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in U.$$

A V függvényt *pozitív (negatív) szemidefinitnek* nevezzük, ha

$$V(\mathbf{0}) = 0 \quad \text{és} \quad V(\mathbf{x}) \geq 0 \quad (V(\mathbf{x}) \leq 0) \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in U.$$

Nyilván V pontosan akkor negatív (szemi)definit, ha $-V$ pozitív (szemi)definit. Az alkalmazásokban sokszor V értelmezési tartománya $U = \mathbb{R}^n$.

5.17. Példa. Legyen

$$V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

kétváltozós kvadratikus függvény. Feltesszük, hogy $a \neq 0$. Alakítsuk V -t teljes négyzetté:

$$V(x, y) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}xy\right) + cy^2 = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}y^2\right) + cy^2 = a\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}y^2.$$

Ebből látható, hogy ha

$$a > 0 \quad \text{és} \quad 4ac - b^2 \geq 0,$$

akkor V pozitív szemidefinit. Ha pedig

$$a < 0 \quad \text{és} \quad 4ac - b^2 \geq 0,$$

akkor pedig V negatív szemidefinit.

V pontosan akkor lesz pozitív definit, ha

$$a > 0 \quad \text{és} \quad 4ac - b^2 > 0,$$

hiszen ha $V(x, y) = 0$, akkor ebből következik, hogy

$$a\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 = 0 \quad \text{és} \quad \frac{4ac - b^2}{4a}y^2 = 0,$$

amiből következik, hogy $y = 0$ és így $x = 0$.

Hasonlóan, V pontosan akkor negatív definit, ha

$$a < 0 \quad \text{és} \quad 4ac - b^2 > 0.$$

□

Az n -dimenziós esetre a kvadratikus függvény általános alakja

$$V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad V(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j.$$

Ezt vektoriálisan a

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

alakban írhatjuk fel, ahol

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T, \quad \mathbf{A} = (a_{ij}).$$

Megmutatható a következő tétel.

5.18. Tétel (Sylvester). *A $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ kvadratikus függvény akkor és csak akkor pozitív definit, ha minden főminora pozitív, azaz*

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Tekintsük újra az

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (5.14)$$

nemlineáris egyenletet, ahol feltesszük, hogy $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, azaz legyen $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ az egyenlet egyensúlyi helyzete. Ennek stabilitási tulajdonságait fogjuk vizsgálni.

Az \mathbf{f} függvény komponensfüggvényeit jelölje $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))^T$. Legyen $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan parciálisan differenciálható. Számítsuk ki a $V(\mathbf{x}(t))$ összetett függvény deriváltját, ahol $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ az (5.14) egyenlet megoldása:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}(\mathbf{x}(t)) &= \frac{\partial V}{\partial x_1}(\mathbf{x}(t))x_1'(t) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n}(\mathbf{x}(t))x_n'(t) \\ &= \frac{\partial V}{\partial x_1}(\mathbf{x}(t))f_1(\mathbf{x}(t)) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n}(\mathbf{x}(t))f_n(\mathbf{x}(t)). \end{aligned}$$

Ez a képlet motiválja az alábbi definíciót. Az \mathbf{f} függvény (5.14) egyenletre vonatkozó deriváltját a

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial x_1}(\mathbf{x})f_1(\mathbf{x}) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n}(\mathbf{x})f_n(\mathbf{x})$$

képlettel definiáljuk. Ha a $\dot{V}(\mathbf{x})$ függvényről tudjuk, hogy negatív definit, akkor bármely $\mathbf{x}(t)$ megoldásra a $V(\mathbf{x}(t))$ összetett függvényről tudjuk, hogy szigorúan monoton csökkenő lesz. Ha emellett azt is belátjuk, hogy $V(\mathbf{x}(t)) \rightarrow 0$, ha $t \rightarrow \infty$, akkor ebből $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ is következik. Ez az elve a következő tétel bizonyításának, de a részletektől eltekintünk.

5.19. Tétel (Ljapunov). *Tegyük fel, hogy $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $\mathbf{0} \in U$. Legyen $V: U \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan parciálisan differenciálható.*

- (a) *Ha V pozitív definit és \dot{V} negatív szemidefinit, akkor az (5.14) egyenlet $\mathbf{0}$ egyensúlyi helyzete stabil.*
- (b) *Ha V pozitív definit és \dot{V} negatív definit, akkor a $\mathbf{0}$ egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabil.*
- (c) *Ha $\mathbf{0}$ bármely környezetében létezik olyan \mathbf{x} , hogy $V(\mathbf{x}) > 0$, és \dot{V} pozitív definit, akkor a $\mathbf{0}$ egyensúlyi helyzet instabil.*

Egy olyan V függvényt, amely pozitív definit és amelynek az (5.14) egyenletre vonatkozó \dot{V} deriváltja negatív szemidefinit, *Ljapunov-függvénynek* nevezünk.

5.20. Példa. $V(x, y) = ax^2 + by^2$ alakú Ljapunov-függvény megadásával igazoljuk, hogy az

$$\begin{aligned} x' &= -x^3 - 2xy \\ y' &= 2x^2 - 6y \end{aligned}$$

egyenletrendszer $(0, 0)$ megoldása aszimptotikusan stabil!

Olyan Ljapunov-függvényt keresünk, amelyre $a > 0$ és $b > 0$ (azaz V pozitív definit), és amelyre \dot{V} negatív definit. Számítsuk ki

$$\dot{V}(x, y) = 2ax(-x^3 - 2xy) + 2by(2x^2 - 6y) = -2ax^4 + (4b - 4a)x^2y - 12by^2.$$

Látható, hogy ha $a = b$, például $a = b = 1$, akkor az x^2y -os tag kiesik, és így

$$\dot{V}(x, y) = -2x^4 - 12y^2$$

negatív definit lesz. Ezért az 5.19. Tételből következik az állítás.

Megjegyezzük, hogy erre az egyenletre a linearizáció módszere nem működik, hiszen az egyenlet linearizációja $x' = 0$ és $y' = 0$, ami csak stabil egyensúlyi helyzettel rendelkezik, így az 5.15. Tétel nem alkalmazható. \square

5.21. Példa. $V(x, y) = ax^2 + by^2$ alakú Ljapunov-függvény megadásával igazoljuk, hogy az

$$\begin{aligned}x' &= -x + 5y^2 \\y' &= -3xy\end{aligned}$$

egyenletrendszer $(0, 0)$ megoldása stabil!

Olyan Ljapunov-függvényt keresünk, amelyre $a > 0$ és $b > 0$, és amelyre \dot{V} negatív szemidefinit. Tekintsük

$$\dot{V}(x, y) = 2ax(-x + 5y^2) + 2by(-3xy) = -2ax^2 + (10a - 6b)xy^2.$$

Látható, hogy ha az x^2y -os tag nem esik ki, akkor ez előjelet válthat, azaz \dot{V} nem biztos, hogy szemidefinit. Úgy választjuk meg tehát a paramétereket, hogy $10a - 6b = 0$ teljesüljön. Ilyen például $a = 3$ és $b = 5$. Erre $\dot{V}(x, y) = -6x^2$, ami csak negatív szemidefinit, hiszen $V(0, y) = 0$ minden y -ra. \square

5.7. Skaláris lineáris egyenletek stabilitása

Tekintsük az

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (5.15)$$

konstans együtthatós n -edrendű skaláris lineáris homogén differenciálegyenletet és az

$$y(0) = z_1, \quad y'(0) = z_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = z_n$$

kezdeti feltételt. Az (5.15) skaláris egyenlet $y = u$ konstans megoldásait az egyenlet *egyensúlyi helyzetének* nevezzük.

Ahogy ezt az 1.8. szakaszban láttuk, az (5.15) skaláris egyenlet ekvivalens egy

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (5.16)$$

homogén lineáris rendszerrel, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & -\frac{a_3}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}$$

és

$$\mathbf{x}(t) = (y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))^T. \quad (5.17)$$

A stabilitás, instabilitás és aszimptotikus stabilitás fogalmát értelemszerűen megfogalmazzhatjuk a skaláris magasabbrendű lineáris egyenletek esetére is. Az (5.15) egyenlet $y = 0$ egyensúlyi helyzetének az (5.16) egyenlet $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzete felel meg. Azt mondjuk, hogy az (5.15) egyenlet $y = 0$ egyensúlyi helyzete stabil, ha az (5.16) egyenlet $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyensúlyi helyzete stabil, azaz bármely $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $\|\mathbf{z}\| < \delta$, akkor $\|(y(t; \mathbf{z}), \dots, y^{(n-1)}(t; \mathbf{z}))^T\| < \varepsilon$ minden $t \geq 0$ -ra. Ha például az euklideszi normát használjuk, akkor speciálisan teljesül az is, hogy $|y(t; \mathbf{z})| < \varepsilon$ minden $t \geq 0$ -ra. Hasonlóan definiálhatjuk az aszimptotikus stabilitás és instabilitás fogalmát az (5.15) egyenletre. Természetesen nemlineáris skaláris n -edrendű egyenletekre is értelmezhetők a stabilitási fogalmak.

Legyen λ az (5.15) skaláris egyenlet karakterisztikus gyöke, azaz a

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad (5.18)$$

karakterisztikus polinom gyöke. Láttuk, hogy ez azzal ekvivalens, hogy az (5.15) egyenletnek $y(t) = e^{\lambda t}$ megoldása. De ekkor az (5.17) helyettesítést használva kapjuk, hogy $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \boldsymbol{\xi}$ megoldása az (5.16) egyenletnek, ahol $\boldsymbol{\xi} = (1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1})^T$, és λ sajátértéke az \mathbf{A} mátrixnak. Fordítva, ha rögzítjük az \mathbf{A} mátrix egy λ sajátértékét, akkor legyen $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ egy a λ -hoz tartozó sajátvektor, és ekkor $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \boldsymbol{\xi}$ megoldása az (5.16) egyenletnek. De ekkor $y(t) = e^{\lambda t} \xi_1$ megoldása lesz az (5.15) egyenletnek, azaz λ gyöke az (5.15) karakterisztikus polinomnak. Megjegyezzük, hogy direkt módon is megmutatható, hogy $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = p(\lambda)$. Kapjuk tehát, hogy \mathbf{A} sajátértékei egybeesnek p gyökeivel, így az 5.11. Tételt erre az esetre megfogalmazva következik az alábbi eredmény:

5.22. Tétel. *Legyen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ az (5.18) képlettel definiált p karakterisztikus polinom gyökei. Ekkor az (5.15) egyenlet $y = 0$ egyensúlyi helyzete*

- (a) *akkor és csak akkor stabil, ha $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$, $i = 1, \dots, n$,*
 (b) *akkor és csak akkor aszimptotikusan stabil, ha $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, n$.*

Az (5.18) alakú p polinomot *stabil polinomnak* nevezzük, ha minden gyökének valós része negatív.

A következő tétel szükséges feltételt ad a stabilitásra.

5.23. Tétel. *Ha az (5.18) alakú p polinom stabil, akkor*

$$\frac{a_0}{a_n} > 0, \quad \frac{a_1}{a_n} > 0, \quad \dots, \quad \frac{a_{n-1}}{a_n} > 0. \quad (5.19)$$

A következő tétel szükséges és elegendő feltételt ad egy p polinom stabilitására.

5.24. Tétel (Routh–Hurwitz-kritérium). *Legyen p az (5.18) képlettel definiált, és legyen*

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}_{n \times n}$$

a polinom Routh–Hurwitz-mátrixa, amelynek definíciója

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{2i-j}, & \text{ha } 0 \leq 2i - j \leq n, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Ekkor a p polinom akkor és csak akkor stabil, ha (5.19) teljesül és a \mathbf{B} mátrix pozitív definit.

A \mathbf{B} mátrixot pozitív definitnek nevezzük, ha a hozzá tartozó $\mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}$ kvadratikus függvény pozitív definit. Megjegyezzük, hogy erre a Sylvester-tétel ad szükséges és elégséges feltételt.

5.25. Példa. Tekintsük a

$$p(\lambda) = 4\lambda^5 + 12\lambda^4 + 25\lambda^3 + 30\lambda^2 + \lambda + 1$$

polinomot. Mutassuk meg, hogy p minden gyöke negatív valós részű, azaz p stabil polinom!

Ehhez írjuk fel a Routh–Hurwitz-mátrixot:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_5 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & 30 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 12 & 25 & 30 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ennek főminorai rendre

$$1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 25 & 30 \end{vmatrix} = 5, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 25 & 30 & 1 \\ 4 & 12 & 25 \end{vmatrix} = 117, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 25 & 30 & 1 & 1 \\ 4 & 12 & 25 & 30 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 836$$

és

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & 30 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 12 & 25 & 30 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3344,$$

azaz a Routh–Hurwitz-kritérium feltételei teljesülnek, ezért a polinom stabil. \square

5.8. Alkalmazások

5.26. Példa. (ingamozgás surlódó közegben) Tekintsük a 2.34. Példában levezetett ingamozgást leíró egyenletet:

$$\theta'' + \frac{\gamma}{m}\theta' + \frac{g}{L}\sin\theta = 0. \quad (5.20)$$

Feltesszük, hogy $\gamma > 0$, azaz olyan közegben történik a mozgás, ahol surlódás hat az ingára. Az $x_1 = \theta$, $x_2 = \theta'$ helyettesítéssel kapjuk az

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -\frac{g}{L}\sin x_1 - \frac{\gamma}{m}x_2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Ennek egyensúlyi helyzetei az

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ -\frac{g}{L}\sin x_1 - \frac{\gamma}{m}x_2 &= 0 \end{aligned}$$

algebrai egyenletrendszer megoldásai, azaz $x_1 = k\pi$ és $x_2 = 0$ lesznek. Végtelen sok egyensúlyi helyzetet kaptunk, de ezek a forgásszögektől eltekintve két pozíciót definiálnak: az inga legalsó illetve legfelső pozíciójában, amikor az inga nyugalomban van.

Linearizációs módszerrel vizsgáljuk a $(k\pi, 0)$ egyensúlyi helyzetek stabilitását. Számítsuk ki ehhez az

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{L}\sin x_1 - \frac{\gamma}{m}x_2 \end{pmatrix}$$

függvény Jacobi-mátrixát:

$$F'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L}\cos x_1 & -\frac{\gamma}{m} \end{pmatrix}.$$

Különböztessünk meg két esetet:

1. Legyen $k = 2j$ páros (*alsó nyugalmi pozíció*). Ekkor

$$F'(2j\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & -\frac{\gamma}{m} \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki a mátrix sajátértékeit:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{\gamma}{m} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{m^2} - \frac{4g}{L}}}{2}. \quad (5.21)$$

Három esetet különböztetünk meg:

(a) $0 < \frac{\gamma^2}{m^2} < \frac{4g}{L}$ (kis surlódás esete). Ekkor komplex sajátértéket kapunk, amelynek valós része negatív. Azaz ebben az esetben a linearizált egyenlet egyensúlyi helyzete aszimptotikusan stabil fókusz. A nemlineáris egyenlet egyensúlyi helyzete is tehát szimptotikusan stabil lesz a linearizált stabilitás tétele szerint.

(b) $\frac{\gamma^2}{m^2} = \frac{4g}{L}$ (kritikus surlódás esete). Ekkor kétszeres valós, negatív sajátértéke van a Jacobi-mátrixnak, azaz a linearizált egyenlet egyensúlyi helyzete aszimptotikusan stabil elfajult csomópont. A nemlineáris egyenlet egyensúlyi helyzete is tehát szimptotikusan stabil lesz.

(c) $\frac{\gamma^2}{m^2} > \frac{4g}{L}$ (nagy surlódás esete). Ekkor két valós sajátértéke van a Jacobi-mátrixnak. Ellenőrizhetjük, hogy ekkor mindkét sajátérték negatív. Ebben az esetben tehát aszimptotikusan stabil csomópont lesz a linearizált egyenlet egyensúlyi helyzete. A nemlineáris egyenlet egyensúlyi helyzete is tehát szimptotikusan stabil lesz.

2. Legyen $k = 2j + 1$ páratlan (*felső nyugalmi pozíció*). Ekkor

$$F'((2j + 1)\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{L} & -\frac{\gamma}{m} \end{pmatrix},$$

amelynek sajátértékei

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{\gamma}{m} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{m^2} + \frac{4g}{L}}}{2}.$$

Két valós sajátértéke van a Jacobi-mátrixnak, ahol az egyik pozitív, a másik pedig negatív. Ezért a linearizált egyenlet egyensúlyi helyzete nyeregpon, azaz instabil. Ekkor a nemlineáris egyenlet egyensúlyi helyzete is instabil lesz.

A kis surlódás esetén néhány trajektória grafikonja az 5.29. Ábrán látható. Jól látható, hogy a linearizált egyenlet egyensúlyi helyzetei stabilitási tulajdonságai megőrződnek a nemlineáris esetben. Az alsó egyensúlyi helyzetekben fókuszpont, a felső egyensúlyi helyzetekben pedig nyeregponok nemlineáris deformációi láthatók. \square

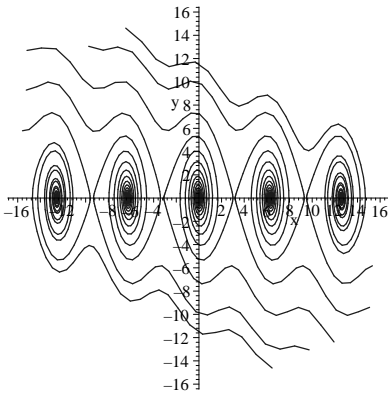
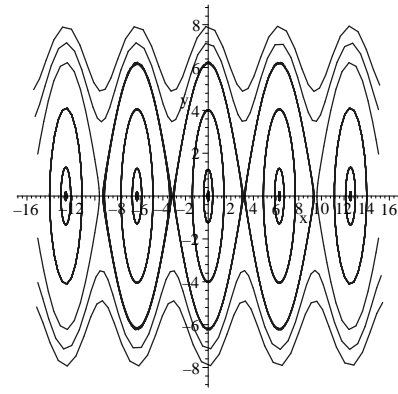
5.27. Példa. (ingamozgás surlódás nélkül) Tekintsük az (5.20) ingamozgás egyenletét abban az esetben, amikor nem hat surlódás az ingára, azaz $\gamma = 0$:

$$\theta'' + \frac{g}{L} \sin \theta = 0. \quad (5.22)$$

Rendszerré átírva a skaláris egyenletet az

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -\frac{g}{L} \sin x_1 \end{aligned}$$

egyenletrendszeret kapjuk. Most is, ahogy az 5.26. Példában, a rendszer egyensúlyi helyzetei a $(k\pi, 0)$ pontok.

5.29. Ábra. $m = 1, L = 1, \gamma = 0.1$ 5.30. Ábra. $m = 1, L = 1, \gamma = 0$

A felső egyensúlyi helyzetben $\gamma = 0$ -ra is egy pozitív és egy negatív sajátértéke lesz a Jacobi-mátrixnak, azaz a lineáris és így a nemlineáris egyenlet egyensúlyi helyzete is instabil lesz.

Az alsó egyensúlyi helyzetben (páros k esete) az (5.21) képletből látható, hogy a Jacobi-mátrixnak tiszta képzetes sajátértékei vannak, azaz a linearizált egyenlet egyensúlyi helyzete centrum, azaz stabil az egyensúlyi helyzet. A linearizált stabilitás tétele viszont nem alkalmazható erre az esetre.

Alkalmazzuk a Ljapunov-módszert a $(0,0)$ egyensúlyi helyzet stabilitása eldöntésére. Ehhez egy Ljapunov-függvényt kell találnunk. Mechanikai alkalmazásokban konzervatív rendszerek esetén a test teljes energiája használható Ljapunov-függvényként. Az m tömegű test helyzeti energiája, azaz az a munka, amit a legalsó pozíció magasságából a $\theta = x_1$ szöghöz tartozó magasságba emeléshez szükséges $mgL(1 - \cos x_1)$. A test kinetikus energiája $\frac{1}{2}mL^2(\theta')^2 = \frac{1}{2}mL^2x_2^2$. Tekintsük tehát a

$$V(x_1, x_2) = mgL(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}mL^2x_2^2$$

függvényt. Legyen U egy olyan nyílt környezete $(0,0)$ -nak, amely nem tartalmaz másik egyensúlyi helyzetet. Nyilván ekkor $1 - \cos x_1 > 0$ teljesül $x_1 \neq 0$ -ra U -ban, és ezért V pozitív definit. Számítsuk ki a rendszerre vonatkozó deriváltját:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= mgL \sin x_1 \cdot x_1' + mL^2 x_2 x_2' \\ &= mgL \sin x_1 \cdot x_2 - mL^2 x_2 \frac{g}{L} \sin x_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Kaptuk tehát, hogy speciálisan \dot{V} negatív szemidefinit. A Ljapunov-féle stabilitási tételből következik, hogy az origó stabil egyensúlyi helyzet.

Tekintsünk most egy $(2j\pi, 0)$ általános alsó egyensúlyi helyzetet. Vezessük be az $y_1 = x_1 - 2j\pi$ és $y_2 = x_2$ változókat. Ekkor $y_1' = x_1' = x_2 = y_2$, $y_2' = x_2' = -\frac{g}{L} \sin x_1 = -\frac{g}{L} \sin(y_1 + 2j\pi) = -\frac{g}{L} \sin y_1$, és így az

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\frac{g}{L} \sin y_1 \end{aligned}$$

teljesül. Mivel beláttuk korábban, hogy ennek a rendszernek az origó stabil egyensúlyi helyzete, ezért az eredeti rendszer $(2j\pi, 0)$ egyensúlyi helyzete is stabil.

Az 5.30. Ábrán surlódás nélküli ingamozgás esetének trajektóriái láthatók. Az alsó egyensúlyi helyzetekben centrum, a felső egyensúlyi helyzetben pedig nyeregpont nemlineáris deformációja látható. Az ábrán megfigyelhető az is, hogy vannak olyan speciális trajektóriák, amelyek

összekötik a felső egyensúlyi helyzeteket. Azaz bármely pozícióhoz (szögelforduláshoz) létezik olyan sebesség, amellyel meglökve az ingát, az a következő ill. előző felső egyensúlyi helyzethez tart $t \rightarrow \infty$ esetén. Ha ennél a speciális kezdősebességnél kisebb sebességet kap az inga, akkor periodikusan leng oda-vissza. Ha pedig ennél nagyobb sebességgel lökjük meg, akkor forogni kezd a tengelye körül megállás nélkül. \square