4. Lineáris rendszerek

4.1. Lineáris algebrai előismeretek

Legyen $\mathbf{A}$ egy $n \times n$-es mátrix, $\mathbf{I}$ az $n \times n$-es egységmátrix. A

$$p(\lambda) := \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$$

n-edfokú polinomot az $\mathbf{A}$ *karakterisztikus polinomjának* nevezzük, p gyökeit az $\mathbf{A}$ mátrix *sajátértékeinek*, az

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$$

illetve az ezzel ekvivalens

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$$

egyenlet egy $\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}$ megoldását az $\mathbf{A}$ mátrix λ-hoz tartozó *sajátvektorának* nevezzük. Ha λ k-szoros gyöke p-nek, akkor azt mondjuk, hogy λ *algebrai multiplicitása* k.

A sajátértékek és sajátvektorok lineáris algebrából ismert néhány fontos tulajdonságát a következő tételben foglaltuk össze.

4.1. Tétel. *Legyen $\mathbf{A}$ $n \times n$-es valós mátrix.*

(i) Az $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó sajátvektorai lineáris alteret alkotnak $\mathbb{C}^n$-ben.

(ii) Ha λ valós, akkor a hozzá tartozó $\boldsymbol{\xi}$ sajátvektor választható valós vektornak.

(iii) Ha $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ páronként különböző sajátértékei $\mathbf{A}$-nak, akkor a hozzá tartozó $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\xi}^{(s)}$ sajátvektorok lineárisan függetlenek.

(iv) Ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus mátrix, akkor sajátértékei valós számok, és megadható sajátvektorokból álló bázis $\mathbb{C}^n$-en.

(v) Ha $\mathbf{A}$-nak létezik $\lambda = \alpha + i\beta$ komplex sajátértéke a $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$ sajátvektorral ($\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$), akkor $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ lineárisan független.

(vi) Ha $\mathbf{A}$-nak $\lambda = \alpha + i\beta$ komplex sajátértéke a $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$ sajátvektorral, akkor $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ is sajátértéke a $\bar{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{u} - i\mathbf{v}$ sajátvektorral.

Az $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátvektorok lineáris alterét más szóval a λ sajátérték *sajátalterének* nevezzük. A λ sajátérték sajátalterének dimenzióját, azaz a λ-hoz tartozó lineárisan független sajátvektorok maximális számát a λ sajátérték *geometriai multiplicitásának nevezzük.* Ismert, hogy egy sajátérték algebrai multiplicitása mindig nagyobb egyenlő, mint a geometriai multiplicitása. Az előző tétel (iv) pontja szerint szimmetrikus mátrixok sajátértékének geometriai multiplicitása mindig megegyezik az algebrai multiplicitásával. Amint azt az alábbi példák mutatják, nem szimmetrikus mátrixok esetében a geometriai multiplicitás lehet egyenlő, de lehet kisebb is, mint az algebrai multiplicitás.

4.2. Példa. Tekintsük az

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$$

mátrixot. Ennek karakterisztikus polinomja

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -5 & 7-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 12\lambda + 20,$$

ezért **A** sajátértékei $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = 10$. Ekkor természetesen mindkét sajátérték egyszeres algebrai multiplicitású és egyben a geometriai multiplicitásuk is 1.

Tekintsük az

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -5 & 7-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sajátvektor egyenletet. Először nézzük a $\lambda_1 = 2$ sajátértéket. Ezt behelyettesítve a fenti egyenletbe kapjuk

$$\begin{aligned} 3\xi_1 - 3\xi_2 &= 0 \\ -5\xi_1 + 5\xi_2 &= 0. \end{aligned}$$

A két egyenlet összefüggő, ezért az egyik egyenlet elhagyható. Marad például az első egyenlet: $3\xi_1 - 3\xi_2 = 0$. Ennek természetesen végtelen sok megoldása van: $\xi_1 = \xi_2$. Egy lehetséges megoldás például

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Most vegyük a $\lambda_2 = 10$ sajátértéket. Ebben az esetben a sajátvektor egyenlet

$$\begin{aligned} -5\xi_1 - 3\xi_2 &= 0 \\ -5\xi_1 - 3\xi_2 &= 0, \end{aligned}$$

amelynek egy lehetséges megoldása

$$\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

□

4.3. Példa. Tekintsük az

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixot. Ennek karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -5 & 1-\lambda & 5 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 \\ &= \lambda^2(\lambda-1) - \lambda(\lambda-1) \\ &= (\lambda-1)^2(\lambda+1). \end{aligned}$$

Így **A** sajátértékei $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = 1$, ahol λ_1 egyszeres, λ_2 pedig kétszeres gyök, azaz λ_1 algebrai multiplicitása 1, λ_2 algebrai multiplicitása pedig 2.

A sajátvektor egyenlet most

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -5 & 1-\lambda & 5 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Először vegyük a $\lambda_1 = -1$ sajátértéket. Erre a fenti egyenletből kapjuk

$$\begin{aligned} \xi_1 + \xi_3 &= 0 \\ -5\xi_1 + 2\xi_2 + 5\xi_3 &= 0 \\ \xi_1 + \xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Az első és az utolsó egyenlet azonos, így az egyiket elhagyhatjuk:

$$\begin{aligned} \xi_1 + \xi_3 &= 0 \\ -5\xi_1 + 2\xi_2 + 5\xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ez a két egyenlet már független (az egyik nem konstansszorosa a másiknak). Így a három ismeretlen közül, ha az egyiknek az értékét rögzítjük, akkor a másik változó már egyértelműen meghatározott lesz. Legyen például $\xi_3 = 1$, ekkor

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -1 \\ -5\xi_1 + 2\xi_2 &= -5. \end{aligned}$$

amelyből $\xi_1 = -1$ és $\xi_2 = -5$, azaz a $\lambda_1 = -1$ sajátértékhez tartozó egy lehetséges sajátvektor

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Most tekintsük a $\lambda_2 = 1$ sajátértéket. Ebben az esetben

$$\begin{aligned} -\xi_1 + \xi_3 &= 0 \\ -5\xi_1 + 5\xi_3 &= 0 \\ \xi_1 - \xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Látható, hogy a második és a harmadik egyenlet is az első többszöröse, így mindkettő elhagyható:

$$-\xi_1 + \xi_3 = 0.$$

Ekkor $\xi_1 = \xi_3$ és ξ_2 pedig tetszőleges. Így például a

$$\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{\xi}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vektor a λ_2 sajátértékhez tartozó sajátvektora **A**-nak, és ezek a vektorok lineárisan függetlenek is (az egyik nem konstansszorosa a másiknak). Ezért a λ_2 sajátértékhez tartozó sajátaltér 2 dimenziós, azaz λ_2 algebrai multiplicitása és a geometriai multiplicitása is 2. □

4.4. Példa. Tekintsük az

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 5 \\ -14 & 5 & 10 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

mátrixot. Ennek karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -4-\lambda & 1 & 5 \\ -14 & 5-\lambda & 10 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 27 \\ &= \lambda(\lambda^2 - 9) - 3(\lambda^2 - 9) \\ &= (\lambda^2 - 9)(\lambda - 3) \\ &= (\lambda - 3)^2(\lambda + 3). \end{aligned}$$

Ezért **A** sajátértékei $\lambda_1 = -3$ és $\lambda_2 = 3$, ahol λ_1 egyszeres, λ_2 pedig kétszeres gyök, azaz λ_1 algebrai multiplicitása 1, λ_2 algebrai multiplicitása pedig 2.

A sajátvektorok számításához tekintsük a

$$\begin{pmatrix} -4-\lambda & 1 & 5 \\ -14 & 5-\lambda & 10 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sajátvektor egyenletet. Először nézzük a $\lambda_1 = -3$ sajátértéket. Erre a fenti egyenletből kapjuk

$$\begin{aligned} -\xi_1 + \xi_2 + 5\xi_3 &= 0 \\ -14\xi_1 + 8\xi_2 + 10\xi_3 &= 0 \\ -\xi_1 + \xi_2 + 5\xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Az első és az utolsó egyenlet azonos, így elhagyhatjuk az utolsót:

$$\begin{aligned} -\xi_1 + \xi_2 + 5\xi_3 &= 0 \\ -7\xi_1 + 4\xi_2 + 5\xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Két egyenlet maradt, így a sajátaltér egydimenziós. Legyen például $\xi_3 = 1$, ekkor

$$\begin{aligned} -\xi_1 + \xi_2 &= -5 \\ -7\xi_1 + 4\xi_2 &= -5, \end{aligned}$$

amelyből $\xi_1 = -5$ és $\xi_2 = -10$, azaz a $\lambda_1 = -3$ sajátértékhez tartozó egy lehetséges sajátvektor

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Most vegyük a $\lambda_2 = 3$ sajátértéket. Erre kapjuk

$$\begin{aligned} -7\xi_1 + \xi_2 + 5\xi_3 &= 0 \\ -14\xi_1 + 2\xi_2 + 10\xi_3 &= 0 \\ -\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

A második egyenlet az első kétszerese, így elhagyható:

$$\begin{aligned} -7\xi_1 + \xi_2 + 5\xi_3 &= 0 \\ -\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

A maradék két egyenlet már független, Így megint, ha $\xi_3 = c$, akkor a

$$\begin{aligned} -7\xi_1 + \xi_2 &= -5c \\ -\xi_1 + \xi_2 &= c \end{aligned}$$

egyenlet egyértelműen megoldható: $\xi_1 = c$ és $\xi_2 = 2c$. Így a $\lambda_2 = 3$ sajátértékhez tartozó tetszőleges sajátvektor felírható a

$$\boldsymbol{\xi}^{(2)} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

alakban, azaz a λ_2 sajátértékhez tartozó sajátaltér csak 1 dimenziós, tehát λ_2 algebrai multiplicitása ugyan 2, de geometriai multiplicitása csak 1. $\square$

Szükségünk lesz a következő, lineáris algebrából ismert állításokra.

4.5. Tétel. *Legyen* $\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{u}^{(3)}, \dots, \mathbf{u}^{(n)}$ *lineárisan független vektorrendszer* $\mathbb{C}^n$*-ben, és legyen* $\mathbf{v}^{(1)}$ *és* $\mathbf{v}^{(2)}$ *két kineárisan független vektor az* $\mathbf{u}^{(1)}$ *és* $\mathbf{u}^{(2)}$ *által generált lineáris altérből. Ekkor a* $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{u}^{(3)}, \dots, \mathbf{u}^{(n)}$ *vektorrendszer is lineárisan független* $\mathbb{C}^n$*-ben.*

4.6. Tétel. *Legyen* $\mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(n)} \in \mathbb{C}^n$*, és jelölje* $(\mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(n)})$ *azt az* $n \times n$*-es mátrixot, amelynek oszlopvektorai rendre* $\mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(n)}$*. Ekkor az* $\mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(n)}$ *vektorok akkor és csak akkor lineárisan függetlenek, ha* $\det(\mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(n)}) \neq 0$.

4.2. Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum, $t_0 \in I$, $a_{ij}, f_j : I \to \mathbb{R}$ $(i, j = 1, \dots, n)$ függvények, és tekintsük az

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t) \end{aligned}$$

n-dimenziós elsőrendű differenciálegyenlet-rendszert a hozzá tartozó

$$x_1(t_0) = z_1, \quad \dots, \quad x_n(t_0) = z_n$$

kezdeti feltételekkel együtt. Ekkor a fenti feladatot röviden az

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \qquad t \in I, \tag{4.1}$$

és az

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{z} \tag{4.2}$$

vektoriális alakban írhatjuk fel, ahol $\mathbf{A}\colon I \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{f}\colon I \to \mathbb{R}^n$, és

$$\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t))_{n\times n}, \quad \mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T, \quad \mathbf{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))^T, \quad \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)^T.$$

Az egész szakaszban feltesszük, hogy $\mathbf{A}$ és $\mathbf{f}$ folytonos függvények.

Tekintsük a (4.1) egyenlet homogén megfelelőjét:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \qquad t \in I. \tag{4.3}$$

Az 1.36. Tételt erre a lineáris esetre alkalmazva kapjuk az alábbi eredményt.

4.7. Tétel. *Ha* $\mathbf{A}\colon I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ *és* $\mathbf{f}\colon I \to \mathbb{R}^n$ *folytonos függvények, akkor a (4.1)-(4.2) kezdeti érték feladatnak minden* $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ *vektorra létezik egyértelmű megoldása az* I *intervallumon.*

Most is könnyen látható, hogy a homogén egyenlet megoldásainak lineáris kombinációja szintén megoldása a homogén egyenletnek.

4.8. Tétel. *A (4.3) homogén lineáris egyenlet megoldásainak halmaza lineáris tér.*

Az $\{\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}\}$ halmazt a (4.3) homogén egyenlet *fundamentális megoldáshalmazának* vagy a *megoldások alaprendszerének* nevezzük, ha $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ megoldásai a (4.3) egyenletnek és lineárisan független függvények I-n.

Helyezzük el az $\mathbf{x}^{(1)}$ vektor értékű függvény képletét egy mátrix első oszlopában, az $\mathbf{x}^{(2)}$ függvényt a második oszlopában, és így tovább, az $\mathbf{x}^{(n)}$ függvényt az n-edik oszlopában. A kapott mátrixot $(\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t))$ jelöli. Ennek a mátrixnak a determinánsát az $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ megoldások *Wronski-determinánsának* nevezzük:

$$W(t) = \det(\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)).$$

4.9. Tétel. *Az $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ függvények lineárisan függetlenek az I intervallumon, akkor és csak akkor, ha a Wronski-determinánsuk nem azonosan nulla I-n.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy

$$c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t) = \mathbf{0}, \qquad t \in I. \tag{4.4}$$

Jelölje $\mathbf{x}^{(i)} = (\mathbf{x}_1^{(i)}, \ldots, \mathbf{x}_n^{(i)})^T$ $(i = 1, \ldots, n)$. Ekkor

$$\begin{array}{ccccccc} c_1x_1^{(1)}(t) & + & \cdots & + & c_nx_1^{(n)}(t) & = & 0 \\ & & \vdots & & & & \\ c_1x_n^{(1)}(t) & + & \cdots & + & c_nx_n^{(n)}(t) & = & 0. \end{array} \tag{4.5}$$

Ez egy homogén lineáris egyenletrendszer a $c_1, \ldots, c_n$ ismeretlenekre, amelynek együtthatóiból alkotott determináns a megoldások Wronski-determinánsa. Ha van olyan t, amelyre $W(t) \neq 0$, akkor az egyenletrendszernek csak a triviális $c_1 = \cdots = c_n = 0$ megoldása van, azaz a megoldások lineárisan függetlenek.

Fordítva tegyük fel, hogy az $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ függvények lineárisan összefüggőek az I intervallumon, azaz léteznek olyan $c_1, \ldots, c_n$ konstansok, hogy közülük nem mind egyenlő nullával, és (4.4), és így (4.5) is teljesül. Ha valamely $t \in I$-re $W(t) \neq 0$ lenne, akkor ellentmondást kapnánk azzal, hogy a (4.5) egyenletnek lenne $c_1, \ldots, c_n$-re nézve nemtriviális megoldása. Ezért $W(t) = 0$ minden $t \in I$-re. □

A skaláris esettel analóg eredmény kapható a Wronski-determináns alakjára.

4.10. Tétel (Abel-Liouville). *A (4.3) egyenlet megoldásainak Wronski-determinánsa*

$$W(t) = ce^{\int (a_{11}(t)+a_{22}(t)+\cdots+a_{nn}(t))\,dt}, \qquad t \in I$$

alakú, ahol $a_{11}(t), \ldots, a_{nn}(t)$ az $\mathbf{A}(t)$ mátrix főátlójában álló együtthatók.

Bizonyítás: A bizonyítás azon múlik, hogy megmutatható, hogy a Wronski-determináns teljesíti az

$$W'(t) = (a_{11}(t) + a_{22}(t) + \cdots + a_{nn}(t))W(t)$$

differenciálegyenletet. A technikai részleteket az egyszerűség kedvéért csak a kétdimenziós esetre mutatjuk meg. Legyen tehát

$$W(t) = \det\begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & x_1^{(2)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) & x_2^{(2)}(t) \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$W'(t) \quad = \quad \det\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}x_1^{(1)}(t) & \frac{d}{dt}x_1^{(2)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) & x_2^{(2)}(t) \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & x_1^{(2)}(t) \\ \frac{d}{dt}x_2^{(1)}(t) & \frac{d}{dt}x_2^{(2)}(t) \end{pmatrix}.$$

A (4.3) egyenletet koordinátánként kiírva és a determináns számolás azonosságait felhasználva kapjuk

$$\begin{aligned}
W'(t) &= \det\begin{pmatrix} a_{11}(t)x_1^{(1)}(t)+a_{12}(t)x_2^{(1)}(t) & a_{11}(t)x_1^{(2)}(t)+a_{12}(t)x_2^{(2)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) & x_2^{(2)}(t) \end{pmatrix} \\
&\quad + \det\begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & x_1^{(2)}(t) \\ a_{21}(t)x_1^{(1)}(t)+a_{22}(t)x_2^{(1)}(t) & a_{21}(t)x_1^{(2)}(t)+a_{22}(t)x_2^{(2)}(t) \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} a_{11}(t)x_1^{(1)}(t) & a_{11}(t)x_1^{(2)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) & x_2^{(2)}(t) \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{12}(t)x_2^{(1)}(t) & a_{12}(t)x_2^{(2)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) & x_2^{(2)}(t) \end{pmatrix} \\
&\quad + \det\begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & x_1^{(2)}(t) \\ a_{21}(t)x_1^{(1)}(t) & a_{21}(t)x_1^{(2)}(t) \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & x_1^{(2)}(t) \\ a_{22}(t)x_2^{(1)}(t) & a_{22}(t)x_2^{(2)}(t) \end{pmatrix} \\
&= a_{11}(t)\det\begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & x_1^{(2)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) & x_2^{(2)}(t) \end{pmatrix} + 0 + 0 + a_{22}(t)\det\begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & x_1^{(2)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) & x_2^{(2)}(t) \end{pmatrix} \\
&= (a_{11}(t)+a_{22}(t))W(t).
\end{aligned}$$

□

Az előbbi tételből rögtön kapjuk az alábbi következményt.

4.11. Tétel. *Ha $\mathbf{x}^{(1)},\dots,\mathbf{x}^{(n)}$ megoldásai a (4.3) egyenletnek I-n, akkor a Wronski-determinánsuk vagy azonosan nulla I-n vagy egy pontban sem nulla I-n.*

Most is fontos következményt kaphatunk az előbbi állításból.

4.12. Tétel. *Legyen $\mathbf{x}^{(1)},\dots,\mathbf{x}^{(n)}$ olyan megoldásai a (4.3) egyenletnek, amelyek az*

$$\mathbf{x}^{(1)}(t_0)=\mathbf{z}^{(1)}, \quad \dots, \quad \mathbf{x}^{(n)}(t_0)=\mathbf{z}^{(n)} \tag{4.6}$$

kezdeti értékekhez tartoznak. Ekkor az $\mathbf{x}^{(1)},\dots,\mathbf{x}^{(n)}$ függvények akkor és csak akkor lineárisan függetlenek az I intervallumon, ha a

$$\mathbf{z}^{(1)},\dots,\mathbf{z}^{(n)}$$

vektorok lineárisan függetlenek, azaz

$$W(t_0)\neq 0.$$

Bizonyítás: Mivel

$$W(t_0)=\det(\mathbf{x}^{(1)}(t_0),\dots,\mathbf{x}^{(n)}(t_0))=\det(\mathbf{z}^{(1)},\dots,\mathbf{z}^{(n)}),$$

az állítás következik a 4.6. és a 4.11. Tételekből. □

4.13. Tétel. *A (4.3) egyenlet megoldásainak halmaza n-dimenziós lineáris tér.*

Bizonyítás: Legyenek $\mathbf{x}^{(1)},\dots,\mathbf{x}^{(n)}$ a (4.3) egyenlet (4.6) kezdeti értékekhez tartozó megoldásai, ahol $\mathbf{z}^{(1)},\dots,\mathbf{z}^{(n)}$ rögzített, lineárisan független vektorok $\mathbb{R}^n$-en. Ekkor a 4.12. Tétel szerint $\mathbf{x}^{(1)},\dots,\mathbf{x}^{(n)}$ lineárisan függetlenek. Tekintsünk egy tetszőlegesen rögzített $\mathbf{z}\in\mathbb{R}^n$ vektort. Mivel $\{\mathbf{z}^{(1)},\dots,\mathbf{z}^{(n)}\}$ bázis $\mathbb{R}^n$-ben, ezért léteznek olyan $c_1,\dots,c_n$ konstansok, hogy $\mathbf{z}=c_1\mathbf{z}^{(1)}+\dots+c_n\mathbf{z}^{(n)}$. Legyen $\mathbf{x}(t)=c_1\mathbf{x}^{(1)}(t)+\dots+c_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$. Ekkor $\mathbf{x}(t_0)=c_1\mathbf{z}^{(1)}+\dots+c_n\mathbf{z}^{(n)}=\mathbf{z}$. Másrészt $\mathbf{x}$ megoldása a (4.7) egyenletnek, és pontosan ez az egy megoldása van a (4.7) egyenletnek, amely ebből a kezdeti feltételből indul. Minden megoldás kifejezhető tehát $\mathbf{x}^{(1)},\dots,\mathbf{x}^{(n)}$ lineáris kombinációjaként, azaz a megoldások tere n-dimenziós. □

4.3. Konstans együtthatós homogén lineáris rendszerek

Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, és tekintsük az

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad t \in \mathbb{R} \tag{4.7}$$

konstans együtthatós homogén lineáris rendszert.

Keressük a (4.7) egyenlet megoldását az

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{\xi}$$

alakban, ahol $\boldsymbol{\xi}$ valós vagy komplex vektor. Ekkor

$$\mathbf{x}'(t) = \lambda e^{\lambda t}\boldsymbol{\xi},$$

ezért visszahelyettesítve a (4.7) egyenletbe kapjuk, hogy

$$\lambda e^{\lambda t}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{A}e^{\lambda t}\boldsymbol{\xi},$$

ami pontosan akkor teljesül, ha

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0},$$

azaz λ sajátértéke $\mathbf{A}$-nak, $\boldsymbol{\xi}$ pedig a λ-hoz tartozó sajátvektora $\mathbf{A}$-nak.

A 4.13. Tétel szerint tehát elegendő n darab lineárisan független megoldást találni, mert ekkor ezek lineáris kombinációjaként az összes megoldás felírható. Különböző eseteket különböztetünk meg.

1. eset: páronként különböző sajátértékek

Tegyük fel, hogy $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ páronként különböző sajátértékei, $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ pedig a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sajátértékekhez tartozó sajátvektorai $\mathbf{A}$-nak. Lineáris algebrából ismert (lásd a 4.1. Tételt), hogy ekkor $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ lineárisan független vektorok. Kaptuk ekkor, hogy

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \quad \ldots, \quad \mathbf{x}^{(n)}(t) = e^{\lambda_n t}\boldsymbol{\xi}^{(n)}, \qquad t \in \mathbb{R} \tag{4.8}$$

megoldásai a (4.7) egyenletnek. Másrészt

$$W(\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)})(0) = \det(\mathbf{x}^{(1)}(0), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(0)) = \det(\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}) \neq 0,$$

hiszen $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ lineárisan függetlenek. Ezért $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ lineárisan függetlenek, azaz (4.8) egy alaprendszere a (4.7) homogén egyenletnek. Ebben az esetben a (4.7) egyenlet általános megoldása

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{\xi}^{(1)} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}\boldsymbol{\xi}^{(n)}.$$

Ha minden sajátérték valós, akkor a (4.8) alaprendszer valós függvényekből áll, de ha van komplex sajátértéke az együtthatómátrixnak, akkor a (4.8) függvények között komplex függvények is vannak. A következő esetben azt mutatjuk majd meg, hogy ezeket a kompex megoldásokat mindig helyettesíteni lehet valós megoldásokkal.

4.14. Példa. Oldjuk meg az

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}\mathbf{x} \tag{4.9}$$

egyenletet az

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

kezdeti értéket használva! Az együtthatómátrix sajátértéke $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = 10$, a megfelelő sajátvektorok $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = (1,1)^T$ és $\boldsymbol{\xi}^{(2)} = (3,-5)^T$. Ezért az egyenlet általános megoldása

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{10t} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

azaz komponensenként kiírva a megoldást

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 e^{2t} + 3c_2 e^{10t} \\ x_2(t) &= c_1 e^{2t} - 5c_2 e^{10t}. \end{aligned}$$

A kezdeti feltételt alkalmazva

$$\begin{aligned} c_1 + 3c_2 &= 1 \\ c_1 - 5c_2 &= 0, \end{aligned}$$

amelynek megoldása $c_1 = 5/8$ és $c_2 = 1/8$. Ezért a kezdeti érték feladat megoldása

$$\mathbf{x}(t) = \frac{5}{8} e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{8} e^{10t} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

azaz

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{5}{8} e^{2t} + \frac{3}{8} e^{10t} \\ x_2(t) &= \frac{5}{8} e^{2t} - \frac{5}{8} e^{10t}. \end{aligned}$$

□

2. eset: komplex sajátértékek

Tegyük fel, hogy $\lambda = \alpha + i\beta$ komplex sajátértéke $\mathbf{A}$-nak,

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$$

pedig a λ-hoz tartozó (komplex) sajátvektor. (Itt $\mathbf{u}$ a $\boldsymbol{\xi}$ vektor koordinátái valós részét, $\mathbf{v}$ pedig a képzetes részeit tartalmazó vektor.) Ekkor tudjuk, hogy $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ is sajátértéke $\mathbf{A}$-nak és a hozzá tartozó sajátvektor pedig

$$\bar{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{u} - i\mathbf{v}.$$

Kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\lambda t} \boldsymbol{\xi} \\ &= e^{(\alpha + i\beta)t} (\mathbf{u} + i\mathbf{v}) \\ &= e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t)(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) \\ &= e^{\alpha t} \Big(\cos \beta t\, \mathbf{u} - \sin \beta t\, \mathbf{v} + i(\cos \beta t\, \mathbf{v} + \sin \beta t\, \mathbf{u}) \Big) \end{aligned}$$

komplex értékű megoldása a (4.7) egyenletnek. Most is, mint a skaláris lineáris egyenleteknél, könnyen látható, hogy a komplex megoldás valós ill. képzetes része megoldása a (4.7) egyenletnek. Azaz

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = e^{\alpha t} (\cos \beta t\, \mathbf{u} - \sin \beta t\, \mathbf{v}) \qquad \text{és} \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = e^{\alpha t} (\cos \beta t\, \mathbf{v} + \sin \beta t\, \mathbf{u})$$

megoldások. Mivel $\mathbf{x}^{(1)}(0) = \mathbf{u}$ és $\mathbf{x}^{(2)}(0) = \mathbf{v}$, ezért a 4.1. Tétel (v) pontja és a 4.12. Tétel alapján $\mathbf{x}^{(1)}$ és $\mathbf{x}^{(2)}$ lineárisan függetlenek. Így az általános megoldás képletében a $e^{\lambda t}\boldsymbol{\xi}$ és $e^{\bar{\lambda} t}\bar{\boldsymbol{\xi}}$ komplex megoldások helyettesíthetők az $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}$ megoldásokkal, mivel a (komplex függvények terében) ugyanazt az alteret generálják (lásd a 4.5. Tételt).

4.15. Példa. Oldjuk meg az

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

feladatot! Az együtthatómátrix sajátértéke $\lambda_1 = 6+3i$ és $\lambda_2 = 6-3i$, a megfelelő sajátvektorok $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = (5, 1+3i)^T$ és $\boldsymbol{\xi}^{(2)} = (5, 1-3i)^T$. Az egyenlet egy komplex megoldása tehát

$$\begin{aligned} e^{(6+3i)t} \begin{pmatrix} 5 \\ 1+3i \end{pmatrix} &= e^{6t}(\cos 3t + i \sin 3t) \begin{pmatrix} 5 \\ 1+3i \end{pmatrix} \\ &= e^{6t} \begin{pmatrix} 5\cos 3t + 5i \sin 3t \\ \cos 3t - 3\sin 3t + i(3\cos 3t + \sin 3t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ezért az egyenlet általános megoldása

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{6t} \begin{pmatrix} 5\cos 3t \\ \cos 3t - 3\sin 3t \end{pmatrix} + c_2 e^{6t} \begin{pmatrix} 5\sin 3t \\ 3\cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix}.$$

A kezdeti feltételt alkalmazva

$$\begin{array}{rcrcl} 5c_1 & & & = & 2 \\ c_1 & + & 3c_2 & = & 1, \end{array}$$

amelynek megoldása $c_1 = 2/5$ és $c_2 = 1/5$. Ezért a kezdeti érték feladat megoldása

$$\mathbf{x}(t) = e^{6t} \begin{pmatrix} 2\cos 3t \\ \frac{2}{5}\cos 3t - \frac{6}{5}\sin 3t \end{pmatrix} + e^{6t} \begin{pmatrix} \sin 3t \\ \frac{3}{5}\cos 3t + \frac{1}{5}\sin 3t \end{pmatrix} = e^{6t} \begin{pmatrix} 2\cos 3t + \sin 3t \\ \cos 3t - \sin 3t \end{pmatrix}.$$

□

3/a eset: többszörös sajátérték

Tegyük fel, hogy **A** páronként különböző sajátértékei $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, amelyek rendre $k_1, \ldots, k_m$-szeres sajátértékek, azaz λ_j algebrai multiplicitása k_j. Ekkor $n = k_1 + \cdots + k_m$.

Célunk természetesen a (4.7) egyenlet n darab lineárisan független megoldását megtalálni. Ezt elérhetjük úgy, hogy ha λ_j-hez kapcsolódóan k_j db lineárisan független megoldást fel tudunk írni, amelyek a többi sajátértékhez kapcsolódó megoldásoktól lineárisan függetlenek. Ekkor összességében n darab lineárisan független megoldást, azaz egy alaprendszert kapunk.

Legyen λ egy olyan rögzített sajátértéke **A**-nak, amelynek algebrai multiplicitása $k > 1$, és amelynek geometriai multiplicitása, l, megegyezik az algebrai multiplicitásával, azaz $k = l$. Legyenek $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(k)}$ a λ-hoz tartozó lineárisan független sajátvektorok. Ekkor

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \quad \ldots, \quad \mathbf{x}^{(k)}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{\xi}^{(k)}$$

k db lineárisan független megoldása az egyenletnek.

4.16. Példa. Oldjuk meg az

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

egyenletet!

A 4.3. Példában láttuk, hogy az együtthatómátrixnak $\lambda_1 = -1$ egyszeres, $\lambda_2 = 1$ pedig kétszeres sajátértéke. A λ_1 egy sajátvektora $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = (-1, -5, 1)^T$, a λ_2 geometriai multiplicitása 2, és a hozzá tartozó $\boldsymbol{\xi}^{(2)} = (1, 0, 1)^T$ és $\boldsymbol{\xi}^{(3)} = (1, 1, 1)^T$ sajátvektorok lineárisan függetlenek. Ezért az egyenlet általános megoldása

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

3/b eset: többszörös sajátérték

Tegyük fel újra, hogy λ algebrai multiplicitása k, geometriai multiplicitása pedig l, de most tegyük fel, hogy $l < k$. Legyen $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\xi}^{(l)}$ a λ-hoz tartozó lineárisan független sajátvektorok. Ekkor

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \quad \dots, \quad \mathbf{x}^{(l)}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{\xi}^{(l)} \tag{4.12}$$

l db lineárisan független megoldás, de szükség van még $k - l$ db a λ-hoz tartozó lineárisan független megoldásra.

A skaláris egyenletekre alkalmazott próbafüggvény módszerénél tapasztaltak alapján természetes egy újabb megoldást a

$$te^{\lambda t}\boldsymbol{\xi} + e^{\lambda t}\boldsymbol{\eta} \tag{4.13}$$

alakban keresni. Ezt behelyettesítve a (4.7) egyenletbe

$$e^{\lambda t}\boldsymbol{\xi} + \lambda te^{\lambda t}\boldsymbol{\xi} + \lambda e^{\lambda t}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{A}te^{\lambda t}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{A}e^{\lambda t}\boldsymbol{\eta}$$

adódik. Itt pontosan akkor kapunk azonosságot, ha a $te^{\lambda t}$ és az $e^{\lambda t}$ függvények együtthatói megegyeznek az egyenlet két oldalán:

$$\begin{aligned} \lambda\boldsymbol{\xi} &= \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\xi} + \lambda\boldsymbol{\eta} &= \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}, \end{aligned}$$

azaz ekvivalens alakban

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \tag{4.14}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}. \tag{4.15}$$

Ekkor a (4.14) egyenlet szerint $\boldsymbol{\xi}$ a λ-hoz tartozó sajátvektora $\mathbf{A}$-nak, azaz a $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\xi}^{(l)}$ vektorok lineáris kombinációja. A (4.15) egyenletet teljesítő $\boldsymbol{\eta}$ vektort az $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó *általánosított sajátvektorának* nevezzük. Nyilvánvalóan egy $\boldsymbol{\eta}$ általánosított sajátvektor nincs benne a λ sajátérték sajátalterében, hiszen egyébként teljesítené a (4.14) egyenletet, azaz a (4.15) egyenlet bármely $\boldsymbol{\eta}$ megoldása lineárisan független a $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\xi}^{(l)}$ vektoroktól. Másrészt $\boldsymbol{\eta}$ nincs benne egyik λ-tól különböző $\tilde{\lambda}$ sajátérték sajátalterében sem, hiszen ellenkező esetben az $(\mathbf{A} - \tilde{\lambda}\mathbf{I})\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ egyenlet és (4.15) különbségét véve kapnánk, hogy $(\tilde{\lambda} - \lambda)\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}$ lenne, ami ellentmond az előbbieknek. Megmutatható a következő tétel.

4.17. Tétel. *Legyen λ egy olyan sajátértéke az $\mathbf{A}$ mátrixnak, amelynek geometriai multiplicitása kisebb, mint az algebrai multiplicitása. Ekkor a (4.15) egyenletnek létezik legalább egy $\boldsymbol{\eta}$ megoldása, amely nem eleme az $\mathbf{A}$ mátrix összes sajátvektorai által generált lineáris altérnek.*

4.18. Példa. Oldjuk meg az

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 5 \\ -14 & 5 & 10 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

egyenletet!

A 4.4. Példában láttuk, hogy az együtthatómátrixnak $\lambda_1 = -3$ egyszeres, $\lambda_2 = 3$ pedig kétszeres sajátértéke. A λ_1 egy sajátvektora $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = (-5, -10, 1)^T$, a λ_2 geometriai multiplicitása pedig csak 1, és $\boldsymbol{\xi}^{(2)} = (1, 2, 1)^T$ egy lehetséges sajátvektora. Szükségünk van tehát a harmadik megoldás képletéhez a $\lambda_2 = 3$-hoz tartozó $\boldsymbol{\eta}$ általánosított sajátvektorra. A (4.15) egyenletet alkalmazzuk, ahol a jobb oldalon a $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^{(2)}$ vektort használjuk:

$$\begin{aligned} -7\eta_1 + \eta_2 + 5\eta_3 &= 1 \\ -14\eta_1 + 2\eta_2 + 10\eta_3 &= 2 \\ -\eta_1 + \eta_2 - \eta_3 &= 1. \end{aligned}$$

A második egyenlet elhagyható, hiszen az első egyenlet kétszerese:

$$\begin{aligned} -7\eta_1 + \eta_2 + 5\eta_3 &= 1 \\ -\eta_1 + \eta_2 - \eta_3 &= 1. \end{aligned}$$

A kapott két egyenlet már független. Legyen például $\eta_1 = 0$, ekkor

$$\begin{aligned} \eta_2 + 5\eta_3 &= 1 \\ \eta_2 - \eta_3 &= 1, \end{aligned}$$

amelynek megoldása $\eta_2 = 1$ és $\eta_3 = 0$, azaz

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az egyenlet általános megoldása tehát

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \left[t e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

□

4.19. Példa. Tekintsük az

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

egyenletet. Az együtthatómátrix karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 5-\lambda & 2 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 48\lambda + 64 \\ &= -(\lambda - 4)^3. \end{aligned}$$

Így $\mathbf{A}$-nak $\lambda = 4$ háromszoros algebrai multiplicitású sajátértéke. A sajátvektor egyenlet

$$\begin{aligned} \xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 &= 0 \\ \xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 &= 0 \\ -\xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Most elhagyható két egyenlet is. Marad

$$\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 = 0.$$

Két szabadsági fokunk van, tehát találhatunk két lineárisan független megoldását az egyenletnek. Ilyen például

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Szükségünk van tehát általánosított sajátvektorra is a harmadik megoldás képletéhez. Ennek egyenlete

$$\begin{aligned} \eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 &= \xi_1 \\ \eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 &= \xi_2 \\ -\eta_1 - \eta_2 - 2\eta_3 &= \xi_3, \end{aligned}$$

ahol $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ egy sajátvektora az együtthatómátrixnak. Látható, hogy az egyenlet jobb oldalára sem a $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$, sem a $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ vektor nem írható, hiszen ezekre nem oldható meg az egyenletrendszer. Keressük tehát a jobb oldalt $\boldsymbol{\xi} = c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)} + c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ alakban. Ekkor az

$$\begin{aligned} \eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 &= -c_1 - 2c_2 \\ \eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 &= c_1 \\ -\eta_1 - \eta_2 - 2\eta_3 &= c_2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert kapjuk. Ez pontosan akkor oldható meg, ha

$$-c_1 - 2c_2 = c_1 \qquad \text{és} \qquad -c_1 - 2c_2 = -c_2,$$

azaz $c_1 = -c_2$, például $c_1 = 1$ és $c_2 = -1$. Ekkor

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

így az általánosított sajátvektor egyenlete

$$\begin{aligned} \eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 &= 1 \\ \eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 &= 1 \\ -\eta_1 - \eta_2 - 2\eta_3 &= -1. \end{aligned}$$

Most is csak egy egyenlet marad

$$\eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 = 1,$$

amelynek egy lehetséges megoldása például

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ezért az egyenlet általános megoldása

$$\mathbf{x}(t) = e^{4t}\left[c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

□

3/c eset: többszörös sajátérték

Tegyük fel újra, hogy λ algebrai multiplictása k, geometriai multiplicitása pedig l, és $l < k$. Ha $l < k - 1$, akkor a 3/b esetben megadott, általánosított sajátérték segítségével felírt (4.13) megoldáson kívül szükség van még további λ-hoz tartozó megoldásokra. Először tekintsük a következő definíciót.

Egy $\boldsymbol{\eta}$ vektort az $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó *p-edrendű általánosított sajátvektorának* nevezzük, ha

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^p\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}, \qquad \text{de} \qquad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{p-1}\boldsymbol{\eta} \neq \mathbf{0}.$$

Ekkor a

$$\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{p-1}\boldsymbol{\eta}$$

vektor egy a λ-hoz tartozó sajátvektor lesz. Definiáljuk az $\boldsymbol{\eta}^{(0)}, \boldsymbol{\eta}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\eta}^{(p-1)}$ vektorokat az

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\eta}^{(0)} &= (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{p-1}\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi} \\
\boldsymbol{\eta}^{(1)} &= (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{p-2}\boldsymbol{\eta} \\
\boldsymbol{\eta}^{(2)} &= (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{p-3}\boldsymbol{\eta} \\
&\vdots \\
\boldsymbol{\eta}^{(p-2)} &= (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\boldsymbol{\eta} \\
\boldsymbol{\eta}^{(p-1)} &= \boldsymbol{\eta}
\end{aligned}$$

képletekkel. A $\boldsymbol{\eta}^{(0)}, \boldsymbol{\eta}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\eta}^{(p-1)}$ vektorok sorozatát *általánosított sajátvektor láncnak* nevezzük. Ekkor a lánc elemeire teljesülnek az

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\boldsymbol{\eta}^{(0)} &= \mathbf{0} \\
(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\boldsymbol{\eta}^{(1)} &= \boldsymbol{\eta}^{(0)} \\
(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\boldsymbol{\eta}^{(2)} &= \boldsymbol{\eta}^{(1)} \\
&\vdots \\
(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\boldsymbol{\eta}^{(p-1)} &= \boldsymbol{\eta}^{(p-2)}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

egyenletek. Egyszerű számolással ellenőrizhető a következő állítás.

4.20. Tétel. *Az*

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\left(\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\boldsymbol{\eta}^{(0)} + \frac{t^{p-2}}{(p-2)!}\boldsymbol{\eta}^{(1)} + \cdots + t\boldsymbol{\eta}^{(p-2)} + \boldsymbol{\eta}^{(p-1)}\right) \tag{4.17}$$

függvény akkor és csak akkor megoldása a (4.7) egyenletnek, ha teljesülnek a (4.16) egyenletek.

Bizonyítás: Mivel

$$\mathbf{A}\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\left(\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}^{(0)} + \frac{t^{p-2}}{(p-2)!}\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}^{(1)} + \cdots + t\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}^{(p-2)} + \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}^{(p-1)}\right)$$

és

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'(t) &= \lambda e^{\lambda t}\left(\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\boldsymbol{\eta}^{(0)} + \frac{t^{p-2}}{(p-2)!}\boldsymbol{\eta}^{(1)} + \cdots + t\boldsymbol{\eta}^{(p-2)} + \boldsymbol{\eta}^{(p-1)}\right) \\
&\quad + e^{\lambda t}\left(\frac{t^{p-2}}{(p-2)!}\boldsymbol{\eta}^{(0)} + \frac{t^{p-3}}{(p-3)!}\boldsymbol{\eta}^{(1)} + \cdots + t\boldsymbol{\eta}^{(p-3)} + \boldsymbol{\eta}^{(p-2)}\right),
\end{aligned}$$

az azonos hatványok összehasonlításával kapjuk a (4.16) egyenleteket. □

Az előző tétel segítségével megfogalmazhatjuk a többszörös sajátérték általános esetére vonatkozó eljárást. A λ többszörös sajátértékhez először felírjuk a (4.12) exponenciális megoldásokat. Ha további megoldásokra is szükségünk van, akkor keresünk egy $\boldsymbol{\eta}^{(0)}, \boldsymbol{\eta}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\eta}^{(p-1)}$ általánosított sajátvektor láncot. Ehhez fel tudunk írni $p-1$ db új megoldást, hiszen ekkor a 4.9. Tétel szerint az

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{x}}^{(1)}(t) &= e^{\lambda t}\left(t\boldsymbol{\eta}^{(0)} + \boldsymbol{\eta}^{(1)}\right) \\
&\vdots \\
\tilde{\mathbf{x}}^{(p-2)}(t) &= e^{\lambda t}\left(\frac{t^{p-2}}{(p-2)!}\boldsymbol{\eta}^{(0)} + \frac{t^{p-3}}{(p-3)!}\boldsymbol{\eta}^{(1)} + \cdots + t\boldsymbol{\eta}^{(p-3)} + \boldsymbol{\eta}^{(p-2)}\right) \\
\tilde{\mathbf{x}}^{(p-1)}(t) &= e^{\lambda t}\left(\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\boldsymbol{\eta}^{(0)} + \frac{t^{p-2}}{(p-2)!}\boldsymbol{\eta}^{(1)} + \cdots + t\boldsymbol{\eta}^{(p-2)} + \boldsymbol{\eta}^{(p-1)}\right)
\end{aligned}$$

függvények is megoldásai a (4.7) egyenletnek. Ezek a (4.12) függvényekkel együtt is lineárisan függetlenek, hiszen az

$$\mathbf{x}^{(1)}(0)=\boldsymbol{\xi}^{(1)},\quad \dots,\quad \mathbf{x}^{(j)}(0)=\boldsymbol{\xi}^{(j)},\quad \tilde{\mathbf{x}}^{(1)}(0)=\boldsymbol{\eta}^{(1)},\quad \dots,\quad \tilde{\mathbf{x}}^{(p-1)}(0)=\boldsymbol{\eta}^{(p-1)}$$

vektorok lineárisan függetlenek. Ha még mindig nincs k darab megoldásunk, akkor keressünk egy, az előzőtől különböző általánosított sajátvektor láncot. Megmutatható, hogy ekkor az új lánchoz elemeihez tartozó megoldásokkal kibővítve az előbbi rendszert, továbbra is lineárisan független rendszert kapunk. Az is belátható, hogy mindig lehet találni annyi láncot, amelyek segítségével a λ-hoz tartozó megoldások rendszere k eleműre kibővíthető.

4.21. Példa. Tekintsük az

$$\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} 7 & -1 & -1\\ 8 & 4 & 4\\ -1 & 1 & 7\end{pmatrix}\mathbf{x}$$

egyenletet! Számítsuk ki az együtthatómátrix sajátértékeit:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} 7-\lambda & -1 & -1\\ 8 & 4-\lambda & 4\\ -1 & 1 & 7-\lambda\end{pmatrix}\\ &= -\lambda^3+18\lambda^2-108\lambda+216\\ &= -(\lambda-6)^3, \end{aligned}$$

így $\lambda=6$ háromszoros sajátértéke az együtthatómátrixnak. A sajátvektoregyenlet

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1\\ 8 & -2 & 4\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

amiből

$$\begin{aligned} \xi_1-\xi_2-\xi_3 &= 0\\ 8\xi_1-2\xi_2+4\xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Legyen például $\xi_3=1$, ekkor

$$\begin{aligned} \xi_1-\xi_2 &= -1\\ 8\xi_1-2\xi_2 &= -4, \end{aligned}$$

amelynek megoldása $\xi_1=-1$ és $\xi_2=-2$. A megfelelő sajátvektor tehát

$$\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix},$$

a sajátérték geometriai multiplicitása tehát csak 1. Szükségünk van általánosított sajátvektorra, amelynek egyenlete:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1\\ 8 & -2 & 4\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix},$$

azaz

$$\begin{aligned} \eta_1-\eta_2-\eta_3 &= -1\\ 8\eta_1-2\eta_2+4\eta_3 &= -2\\ -\eta_1+\eta_2+\eta_3 &= 1. \end{aligned}$$

Most is elhagyható a harmadik egyenlet, de az első két egyenlet már független:

$$\begin{aligned} \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 &= -1 \\ 8\eta_1 - 2\eta_2 + 4\eta_3 &= -2. \end{aligned}$$

Ennek egy lehetséges megoldása $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 1$ és $\eta_3 = 0$, azaz

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de ettől lineárisan független második megoldása már nincs az egyenletnek. Ezért keresünk másodrendű általánosított sajátvektort is:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 8 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az egyenletrendszernek létezik megoldása, hiszen a harmadik egyenlet elhagyható:

$$\begin{aligned} \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 &= 0 \\ 8\omega_1 - 2\omega_2 + 4\omega_3 &= 1. \end{aligned}$$

Egy megoldás például

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az egyenlet általános megoldása tehát

$$\mathbf{x}(t) = e^{6t}\left\{ c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \left[t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + c_3 \left[\frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right\}.$$

□

4. eset: többszörös komplex sajátértékek

Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$-nak $\lambda = \alpha + i\beta$ k-szoros komplex sajátértéke, és legyen l a geometriai multiplicitása. (Ekkor persze $\bar{\lambda}$ is k-szoros sajátérték, amelynek geometriai multiplicitása szintén l.) Legyen

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \mathbf{u}^{(1)} + i\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(l)} = \mathbf{u}^{(l)} + i\mathbf{v}^{(l)}$$

a hozzá tartozó l darab lineárisan független sajátvektor. Ekkor, ahogy azt a 2. esetben láttuk, az

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = e^{\alpha t}(\cos\beta t\, \mathbf{u}^{(1)} - \sin\beta t\, \mathbf{v}^{(1)}), \ldots, \mathbf{x}^{(l)}(t) = e^{\alpha t}(\cos\beta t\, \mathbf{u}^{(l)} - \sin\beta t\, \mathbf{v}^{(l)})$$

és

$$\mathbf{x}^{(l+1)}(t) = e^{\alpha t}(\cos\beta t\, \mathbf{v}^{(1)} + \sin\beta t\, \mathbf{u}^{(1)}), \ldots, \mathbf{x}^{(2l)}(t) = e^{\alpha t}(\cos\beta t\, \mathbf{v}^{(l)} + \sin\beta t\, \mathbf{u}^{(l)})$$

függvények lineárisan független valós megoldásai az egyenletnek. Ha $l = k$, akkor a λ és $\bar{\lambda}$ sajátértékekhez megtaláltuk az összes szükséges megoldást. Ha $l < k$, akkor ahogy ezt a 3/b és 3/c esetekben leírtuk, (4.17) alakú komplex megoldások segítségével mindig fel tudunk írni $k - l$ db további komplex megoldást. De ekkor ezek valós ill. képzetes részét véve, fel tudunk írni további $2(k - l)$ darab valós megoldást. Ezt folytatva (a komplex megoldások valós és képzetes részét véve) mindig meg tudjuk adni a megoldások terének valós alaprendszerét.

4.4. Fundamentális mátrix és Cauchy-mátrix

Tegyük fel, hogy az

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \qquad t \in I, \tag{4.18}$$

homogén lineáris egyenletnek ismerjük egy

$$\mathbf{x}^{(1)}(t), \quad \dots, \quad \mathbf{x}^{(n)}(t), \qquad t \in I$$

fundamentális rendszerét. A

$$\mathbf{\Psi}(t) = (\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(n)}(t)), \qquad t \in I$$

mátrix értékű függvényt a (4.18) rendszer *fundamentális mátrixának* vagy más szóval *alapmátrixának* hívjuk. Ekkor $W(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}) = \det(\mathbf{\Psi}(t))$ a megoldások Wronski-determinánsa. A Wronski-determináns tulajdonságaiból következik, hogy $\mathbf{\Psi}(t)$ invertálható minden $t \in I$-re. Jelölje $\mathbf{\Psi}^{-1}(t)$ a $\mathbf{\Psi}(t)$ mátrix inverzét.

A (4.18) egyenlet általános megoldása felírható az

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)} + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}$$

alakban. Ezt a $\mathbf{\Psi}(t)$ fundamentális mátrix segítségével röviden az

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{c} \tag{4.19}$$

alakban írhatjuk fel, ahol $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$ egy tetszőleges konstans vektor. Ha a (4.18) egyenlethez tekintjük az

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{z} \tag{4.20}$$

kezdeti feltételt, akkor a (4.18)-(4.20) kezdeti érték feladat megoldását a (4.19) formulában azon $\mathbf{c}$ vektor adja, amelyre

$$\mathbf{z} = \mathbf{\Psi}(t_0)\mathbf{c},$$

azaz

$$\mathbf{c} = \mathbf{\Psi}^{-1}(t_0)\mathbf{z}.$$

Ezt visszahelyettesítve a (4.19) képletbe kapjuk, hogy a (4.18)-(4.20) kezdeti érték feladat megoldásának képlete

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0)\mathbf{z}, \qquad t \in I. \tag{4.21}$$

Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Psi}'(t) &= (\mathbf{x}^{(1)\prime}(t), \dots, \mathbf{x}^{(n)\prime}(t)) \\
&= (\mathbf{A}(t)\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{A}(t)\mathbf{x}^{(n)}(t)) \\
&= \mathbf{A}(t)(\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(n)}(t)) \\
&= \mathbf{A}(t)\mathbf{\Psi}(t).
\end{aligned}$$

A fundamentális mátrix fenti tulajdonságait összefoglalhatjuk a következő tételben:

4.22. Tétel. *Legyen* $\mathbf{\Psi}(t), \quad t \in I$ *egy fundamentális mátrixa a (4.18) rendszernek. Ekkor*

(i) $\mathbf{\Psi}(t)$ *invertálható minden* $t \in I$*-re;*

(ii) a (4.18) egyenlet általános megoldásának képlete $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{c}, \quad t \in I, \ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$*;*

(iii) a (4.18)-(4.20) kezdeti érték feladat megoldásának képlete $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0)\mathbf{z}, \quad t \in I$*;*

(iv) a fundamentális mátrix teljesíti a $\mathbf{\Psi}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Psi}(t)$ *mátrix differenciálegyenletet.*

4.23. Példa. Tekintsük újra a 4.14. Példában vizsgált (4.9) egyenletet. Ennek általános megoldását megadtuk a (4.10) képletben. Az ebben szereplő két megoldást elhelyezve egy mátrix oszlopaiban kapjuk a

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 3e^{10t} \\ e^{2t} & -5e^{10t} \end{pmatrix}$$

mátrixot, amely egy lehetséges fundamentális mátrixa a (4.9) egyenletnek. □

4.24. Példa. Könnyen ellenőrizhető, hogy a 4.15. feladatban vizsgált egyenlet egy fundamentális mátrixa

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} 5e^{6t}\cos 3t & 5e^{6t}\sin 3t \\ e^{6t}(\cos 3t - 3\sin 3t) & e^{6t}(3\cos 3t + \sin 3t) \end{pmatrix}.$$

□

Mivel végtelen sok fundamentális rendszer választható a megoldások teréből, ezért egy homogén lineáris rendszernek végtelen sok fundamentális mátrixa létezik. Egy speciális fundamentális mátrix az a $\mathbf{\Phi}(t)$-vel jelölt fundamentális mátrix, amelyre a $\mathbf{\Phi}(0) = I$ kezdeti feltétel teljesül, azaz amelynek oszlopvektorai azok az $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$ megoldásai a (4.18) egyenletnek, amelyek az

$$\mathbf{x}^{(1)}(0) = \mathbf{e}^{(1)}, \quad \ldots, \quad \mathbf{x}^{(n)}(0) = \mathbf{e}^{(n)}$$

kezdeti feltételekhez tartoznak. (Itt $\mathbf{e}^{(j)}$ a j-edik standard bázisvektor $\mathbb{R}^n$-ben, azaz j-edik koordinátája 1, az összes többi pedig 0.) Erre a speciális fundamentális mátrixra a (4.21) formula az

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{z}, \qquad t \in I \tag{4.22}$$

képletre egyszerűsödik.

4.25. Példa. Tekintsük újra a 4.14. és 4.23. Példákban vizsgált (4.9) egyenletet. Írjuk fel most a rendszer $\mathbf{\Phi}(t)$ fundamentális mátrixát! Ehhez azt a két megoldását használjuk a (4.9) egyenletnek, amelyek az

$$\mathbf{x}^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{illetve} \qquad \mathbf{x}^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

kezdeti feltételekhez tartoznak. $\mathbf{x}^{(1)}$-et meghatároztuk a 4.14. Példában (lásd a (4.11) képletet):

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \frac{5}{8}e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{8}e^{10t}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{x}^{(2)}$ meghatározásához a (4.10) általános megoldás képletébe helyettesítjük be a kezdeti feltételt:

$$\begin{array}{ccccc} c_1 & + & 3c_2 & = & 0 \\ c_1 & - & 5c_2 & = & 1, \end{array}$$

amelyből $c_1 = 3/8$ és $c_2 = -1/8$ adódik, azaz

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \frac{3}{8}e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{8}e^{10t}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Ezért a keresett fundamentális mátrix

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} \frac{5}{8}e^{2t} + \frac{3}{8}e^{10t} & \frac{3}{8}e^{2t} - \frac{3}{8}e^{10t} \\ \frac{5}{8}e^{2t} - \frac{5}{8}e^{10t} & \frac{3}{8}e^{2t} + \frac{5}{8}e^{10t} \end{pmatrix}. \tag{4.23}$$

□

Megmutatható a következő állítás:

4.26. Tétel. *Legyen* $\mathbf{\Psi}(t),\quad t\in I$ *egy fundamentális mátrixa a (4.18) egyenletnek,* $\mathbf{P}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ *egy invertálható konstans mátrix. Ekkor a*

$$\tilde{\mathbf{\Psi}}(t)=\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{P} \tag{4.24}$$

mátrix is fundamentális mátrixa a (4.18) egyenletnek. Fordítva, ha $\mathbf{\Psi}(t),\tilde{\mathbf{\Psi}}(t)\quad t\in I$ *két fundamentális mátrixa a (4.18) egyenletnek, akkor létezik olyan* $\mathbf{P}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ *invertálható konstans mátrix, hogy (4.24) teljesül.*

A (4.21) képlet motiválja a következő definíciót: az

$$\mathbf{U}(t,t_0)=\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0)$$

mátrixot a (4.18) egyenlet *Cauchy-mátrixának* nevezzük. A 4.26. tétel segítségével könnyen megmutatható, hogy különböző fundamentális mátrixokra felírt Cauchy-mátrixok azonosak, azaz a (4.18) egyenlet Cauchy-mátrixa egyértelműen definiált. Legyen ugyanis $\tilde{\mathbf{\Psi}}(t)$ egy másik fundamentális mátrix. Ekkor (4.24) teljesül, ezért

$$\tilde{\mathbf{\Psi}}(t)\tilde{\mathbf{\Psi}}^{-1}(t_0)=(\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{P})(\mathbf{\Psi}(t_0)\mathbf{P})^{-1}=\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0)=\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0).$$

A következő tételben összefoglaltuk a Cauchy-mátrix néhány alapvető tulajdonságát:

4.27. Tétel. *Legyen* $\mathbf{U}(t,t_0)$ *a (4.18) rendszer Cauchy-mátrixa. Ekkor*

(i) $\mathbf{U}(t,t_0)$ *invertálható minden* $t,t_0\in I$*-re, és* $\mathbf{U}^{-1}(t,t_0)=\mathbf{U}(t_0,t)$*;*

(ii) $\mathbf{U}(t,t_0)=\mathbf{U}(t,s)\mathbf{U}(s,t_0)$ *minden* $t,t_0,s\in I$*-re;*

(iii) a (4.18)-(4.20) kezdeti érték feladat megoldása $\mathbf{x}(t)=\mathbf{U}(t,t_0)\mathbf{z},\quad t\in I$*;*

(iv) $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{U}(t,t_0)=\mathbf{A}(t)\mathbf{U}(t,t_0),\quad \mathbf{U}(t_0,t_0)=\mathbf{I}$.

Bizonyítás: (i) Az állítás következik a

$$\mathbf{U}(t,t_0)\mathbf{U}(t_0,t)=(\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0))(\mathbf{\Psi}(t_0)\mathbf{\Psi}^{-1}(t))=\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(t)=\mathbf{I}$$

számolásból.

(ii) $\mathbf{U}$ definícióját felhasználva kapjuk:

$$\mathbf{U}(t,s)\mathbf{U}(s,t_0)=\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(s)\mathbf{\Psi}(s)\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0)=\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0)=\mathbf{U}(t,t_0).$$

(iii) A 4.22. Tétel (iii) pontjából következik.

(iv) A 4.22. Tétel (iv) pontja szerint

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{U}(t,t_0)=\mathbf{\Psi}'(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0)=\mathbf{A}(t)\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0)=\mathbf{A}(t)\mathbf{U}(t,t_0).$$

□

4.5. Mátrix exponenciális függvény

Valós vagy komplex x-re az e^x függvény egy lehetsége definíciója az

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots$$

hatványsorral történhet. Ennek mintájára egy $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra definiáljuk az $e^{\mathbf{A}}$ mátrix exponenciális kifejezést az

$$e^{\mathbf{A}} = 1 + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^k}{k!} + \cdots$$

formális végtelen sorral. Megmutatjuk, hogy ez a sor konvergens. Vegyünk egy tetszőleges $\|\cdot\|$ mátrixnormát. Erre

$$\left\|\frac{\mathbf{A}^k}{k!}\right\| \leq \frac{\|\mathbf{A}\|^k}{k!},$$

ezért a majoráns kritérium szerint

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\frac{\mathbf{A}^k}{k!}\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|\mathbf{A}\|^k}{k!} = e^{\|\mathbf{A}\|} < \infty,$$

azaz

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^k}{k!}$$

abszolút konvergens, így konvergens is.

Definiálhatjuk ezért a

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} \tag{4.25}$$

mátrix függvényt. Az előbbiek szerint ez a végtelen sor konvergens minden t-re, sőt bármely véges intervallumon a hatványsor egyenletesen is konvergens, ezért akárhányszor differenciálható, és

$$\mathbf{\Phi}'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\mathbf{A}^k t^{k-1}}{k!} = \mathbf{A}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} = \mathbf{A}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t).$$

A definíció alapján

$$\mathbf{\Phi}(0) = e^{\mathbf{A}0} = \mathbf{I}.$$

Mivel a (4.25) hatványsor abszolút konvergens, ezért $e^{\mathbf{A}t}$ és $e^{\mathbf{A}s}$ Cauchy-szorzata konvergens, így ezt, és a binomiális tételt alkalmazva

$$\begin{aligned}
e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}s} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^l s^l}{l!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\frac{\mathbf{A}^j t^j}{j!}\frac{\mathbf{A}^{k-j}s^{k-j}}{(k-j)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^k}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}t^j s^{k-j} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^k(t+s)^k}{k!} \\
&= e^{\mathbf{A}(t+s)}.
\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy $e^{\mathbf{A}t}$ invertálható, és inverze $e^{-\mathbf{A}t}$, hiszen

$$e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}(t-t)} = \mathbf{I}.$$

Összefoglalhatjuk a kapott eredményeket a következő tételben.

4.28. Tétel. *Az $e^{\mathbf{A}t}$ mátrix exponenciális függvényre*

(i) $e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}s} = e^{\mathbf{A}(t+s)}$ *minden $t, s \in \mathbb{R}$-re;*

(ii) $e^{\mathbf{A}t}$ *invertálható, és inverze* $e^{-\mathbf{A}t}$*;*

(iv) $e^{\mathbf{A}0} = \mathbf{I}$*;*

(v) $e^{\mathbf{A}t}$ *differenciálható minden t-re, és* $\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$*;*

(vi) Az

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

konstans együtthatós homogén lineáris rendszer $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$ kezdeti feltételt teljesítő alapmátrixa

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$$

alakban adható meg, és a Cauchy-mátrixa pedig

$$\mathbf{U}(t, t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}.$$

4.29. Példa. Számítsuk ki az $e^{\mathbf{A}}$ mátrix exponenciális értéket, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}.$$

A 4.14., 4.23. és 4.25. Példában vizsgáltuk az $\mathbf{A}$ mátrixhoz tartozó homogén lineáris rendszert. A 4.25. Példában például a (4.23) képletben megadtuk a homogén rendszer $\mathbf{\Phi}$ alapmátrixát. Mivel $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$, ezért a (4.23) képletbe $t = 1$-et behelyettesítve kapjuk

$$e^{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8}e^2 + \frac{3}{8}e^{10} & \frac{3}{8}e^2 - \frac{3}{8}e^{10} \\ \frac{5}{8}e^2 - \frac{5}{8}e^{10} & \frac{3}{8}e^2 + \frac{5}{8}e^{10} \end{pmatrix}.$$

□

Egy vektor értékű $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$ függvény Laplace-transzformáltján az

$$\hat{\mathbf{x}}(s) = \mathcal{L}(\mathbf{x})(s) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}(x_1)(s) \\ \vdots \\ \mathcal{L}(x_n)(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^\infty e^{-st}x_1(t)\,dt \\ \vdots \\ \int_0^\infty e^{-st}x_n(t)\,dt \end{pmatrix}$$

függvényt értjük, amelyet olyan s-re definiálunk, amelyre minden komponens függvény Laplace-transzformáltja definiált. Hasonlóan, mátrix értékű függvények Laplace-transzformáltját is komponensenként definiáljuk. Tekintsük újra az

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{z}$$

kezdeti érték feladatot. Az egyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját véve, és a skaláris függvényekre ismert azonosságok (erre az esetre könnyen ellenőrizhető) általánosítását használva kapjuk, hogy

$$s\hat{\mathbf{x}}(s) - \mathbf{z} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(s),$$

amelyből

$$\hat{\mathbf{x}}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{z}$$

következik. Ebből kapjuk, hogy a kezdeti érték feladat megoldása

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left((s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right)\mathbf{z}.$$

Ezt a képletet a (4.22) formulával és a 4.28. tétel (vi) pontjával összehasonlítva adódik, hogy

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\left((s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right). \tag{4.26}$$

Ez egy újabb módszert ad a mátrix exponenciális függvény, azaz egy fundamentális mátrix kiszámolására.

4.30. Példa. Tekintsük újra a 4.14., 4.23. és 4.25. Példákban vizsgált (4.9) egyenletet. Erre a rendszerre

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} s-5 & 3 \\ 5 & s-7 \end{pmatrix}.$$

Mivel

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^2 - 12\,s + 20,$$

ezért ellenőrizhető, hogy

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{s-7}{s^2-12\,s+20} & -\frac{3}{s^2-12\,s+20} \\ -\frac{5}{s^2-12\,s+20} & \frac{s-5}{s^2-12\,s+20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8}\frac{1}{s-2} + \frac{3}{8}\frac{1}{s-10} & \frac{3}{8}\frac{1}{s-2} - \frac{3}{8}\frac{1}{s-10} \\ \frac{5}{8}\frac{1}{s-2} - \frac{5}{8}\frac{1}{s-10} & \frac{3}{8}\frac{1}{s-2} + \frac{5}{8}\frac{1}{s-10} \end{pmatrix}.$$

Ebből komponensenként inverz Laplace-transzformáltat számolva

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\left((s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right) = \begin{pmatrix} \frac{5}{8}e^{2\,t} + \frac{3}{8}e^{10\,t} & \frac{3}{8}e^{2\,t} - \frac{3}{8}e^{10\,t} \\ \frac{5}{8}e^{2\,t} - \frac{5}{8}e^{10\,t} & \frac{3}{8}e^{2\,t} + \frac{5}{8}e^{10\,t} \end{pmatrix},$$

ahogy azt a 4.25. Példában is láttuk. □

4.6. Inhomogén lineáris rendszerek megoldása konstansok variálásának módszerével

Tekintsük újra az

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \qquad t \in I \tag{4.27}$$

inhomogén lineáris egyenletet és az

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{z} \tag{4.28}$$

kezdeti feltételt. Tegyük fel, hogy a megfelelő

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \qquad t \in I \tag{4.29}$$

homogén egyenletnek adott egy $\mathbf{\Psi}(t)$ fundamentális mátrixa, azaz ismert egy alaprendszere. Ekkor a (4.29) homogén egyenlet általános megoldása

$$\mathbf{x}_H(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{c}, \qquad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n.$$

A konstansok variálásának módszerét használva keressük a (4.27) inhomogén egyenlet partikuláris megoldását az

$$\mathbf{x}_{IP}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}(t)$$

alakban, ahol $\mathbf{u}\colon I \to \mathbb{R}^n$ egy meghatározandó paraméter. A (4.27) egyenletbe visszahelyettesítve kapjuk, hogy $\mathbf{u}$ teljesíti az

$$\mathbf{\Psi}'(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t)$$

egyenletet, amiből

$$\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t) \tag{4.30}$$

következik, hiszen $\mathbf{\Psi}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Psi}(t)$. Ez egy lineáris egyenletrendszer $\mathbf{u}'(t)$-re, amely mindig megoldható, hiszen $\mathbf{\Psi}(t)$ invertálható. Kapjuk

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{\Psi}^{-1}(t)\mathbf{f}(t),$$

amelynek egy konkrét megoldása

$$\mathbf{u}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Psi}^{-1}(s)\mathbf{f}(s)\,ds.$$

Ezt visszahelyettesítve $\mathbf{x}_{IP}$ képletébe és alkalmazva az $\mathbf{x}_{IH}(t) = \mathbf{x}_H(t) + \mathbf{x}_{IP}(t)$ összefüggést kapjuk, hogy a (4.27) inhomogén rendszer általános megoldásának alakja

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{c} + \mathbf{\Psi}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{\Psi}^{-1}(s)\mathbf{f}(s)\,ds.$$

Ebbe behelyettesítve a (4.28) kezdeti feltételt, kapjuk, hogy

$$\mathbf{z} = \mathbf{\Psi}(t_0)\mathbf{c},$$

amiből következik, hogy a (4.27)-(4.28) kezdeti érték feladat megoldása

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0)\mathbf{z} + \mathbf{\Psi}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{\Psi}^{-1}(s)\mathbf{f}(s)\,ds, \qquad t \in I. \tag{4.31}$$

A (4.31) formulát *konstans variációs formulának* nevezzük. A Cauchy-mátrix segítségével a képlet az

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{U}(t,t_0)\mathbf{z} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{U}(t,s)\mathbf{f}(s)\,ds, \qquad t \in I \tag{4.32}$$

ekvivalens alakban is megadható.

A mátrix exponenciális függvény tulajdonságaiból (lásd 4.28. Tételt) következik, hogy az

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \qquad t \in I$$

konstans együtthatós inhomogén rendszerre felírt (4.31) vagy (4.32) konstans variációs formulának egy másik ekvivalens alakja

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{z} + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{f}(s)\,ds, \qquad t \in I. \tag{4.33}$$

4.31. Példa. Oldjuk meg az

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 7e^{3t} \\ -14e^{3t} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

kezdeti érték feladatot! A 4.14. Példában végigszámoltuk, hogy a megfelelő homogén egyenlet általános megoldása

$$\mathbf{x}_H(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{10t} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix},$$

és így, (ahogy azt a 4.23. Példában is láttuk), a homogén egyenlet egy alapmátrixa

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 3e^{10t} \\ e^{2t} & -5e^{10t} \end{pmatrix}.$$

A konstansok variálásának módszerét használva keressük az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását az $\mathbf{x}_{IP}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}(t)$ alakban. Ekkor $\mathbf{u}$ teljesíti a (4.30) egyenletet, amely ebben az esetben:

$$\begin{aligned} e^{2t}u_1'(t) + 3e^{10t}u_2'(t) &= 7e^{3t} \\ e^{2t}u_1'(t) - 5e^{10t}u_2'(t) &= -14e^{3t}. \end{aligned}$$

Ennek megoldása

$$u_1'(t) = -\frac{7}{8}e^t \qquad \text{és} \qquad u_2'(t) = \frac{21}{8}e^{-7t}.$$

Így

$$u_1(t) = -\int \frac{7}{8}e^t \, dt = -\frac{7}{8}e^t \qquad \text{és} \qquad u_2(t) = \int \frac{21}{8}e^{-7t} \, dt = -\frac{3}{8}e^{-7t}.$$

(Ne felejtsük el, hogy egy $\mathbf{u}$ függvényt elég megadni, ezért nem kell az integráláskor az összes primitív függvényt felírni.) Ezért a partikuláris megoldás képlete

$$\mathbf{x}_{IP}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 3e^{10t} \\ e^{2t} & -5e^{10t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{7}{8}e^t \\ -\frac{3}{8}e^{-7t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix},$$

és így az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{10t} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Ebbe behelyettesítve a kezdeti feltételt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c_1 + 3c_2 - 2 &= -1 \\ c_1 - 5c_2 + 1 &= 2, \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned} c_1 + 3c_2 &= 1 \\ c_1 - 5c_2 &= 1. \end{aligned}$$

Ebből $c_1 = 1$ és $c_2 = 0$ adódik, tehát a kezdeti érték feladat megoldása

$$\mathbf{x}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} - 2e^{3t} \\ e^{2t} + e^{3t} \end{pmatrix}.$$

□

4.32. Példa. Oldjuk meg az

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 15e^{6t} \\ -e^{6t} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

kezdeti érték feladatot! A megfelelő homogén egyenletet a 4.15. Példában oldottuk meg, a 4.24. Példában pedig kaptuk, hogy

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} 5e^{6t}\cos 3t & 5e^{6t}\sin 3t \\ e^{6t}(\cos 3t - 3\sin 3t) & e^{6t}(3\cos 3t + \sin 3t) \end{pmatrix}$$

a homogén egyenlet egy fundamentális mátrixa. A konstansok variálásának módszerét használva keressünk partikuláris megoldást az $\mathbf{x}_{IP}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}(t)$ alakban. Ekkor $\mathbf{u}'$-re az

$$\begin{aligned} 5e^{6t}\cos 3t\, u_1'(t) + 5e^{6t}\sin 3t\, u_2'(t) &= 15e^{6t} \\ e^{6t}(\cos 3t - 3\sin 3t)u_1'(t) + e^{6t}(3\cos 3t + \sin 3t)u_2'(t) &= -e^{6t} \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszert kapjuk. Az első egyenletet egyszerűsíthetjük, majd kivonhatjuk a másodikból. Ekkor

$$\begin{aligned} e^{6t}\cos 3t\, u_1'(t) + e^{6t}\sin 3t\, u_2'(t) &= 3e^{6t} \\ -3e^{6t}\sin 3t\, u_1'(t) + 3e^{6t}\cos 3t\, u_2'(t) &= -4e^{6t} \end{aligned}$$

adódik. Ha az első egyenletet $3\sin 3t$-vel, a másodikat pedig $\cos 3t$-vel megszorozzuk és összeadjuk a két egyenletet, majd a $\cos^2 3t + \sin^2 3t = 1$ azonosságot alkalmazzuk, kapjuk, hogy

$$3e^{6t}u_2'(t) = 9e^{6t}\sin 3t - 4e^{6t}\cos 3t,$$

azaz

$$u_2'(t) = 3\sin 3t - \frac{4}{3}\cos 3t,$$

amiből

$$u_2(t) = -\cos 3t - \frac{4}{9}\sin 3t.$$

Hasonlóan,

$$u_1'(t) = 3\cos 3t + \frac{4}{3}\sin 3t,$$

és így

$$u_1(t) = \sin 3t - \frac{4}{9}\cos 3t.$$

Ezért a partikuláris megoldás képlete

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{IP}(t) &= \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}(t) \\ &= \begin{pmatrix} 5e^{6t}\cos 3t & 5e^{6t}\sin 3t \\ e^{6t}(\cos 3t - 3\sin 3t) & e^{6t}(3\cos 3t + \sin 3t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin 3t - \frac{4}{9}\cos 3t \\ -\cos 3t - \frac{4}{9}\sin 3t \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{9}e^{6t}\begin{pmatrix} 20 \\ 31 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Az egyenlet általános megoldás tehát

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{6t}\begin{pmatrix} 5\cos 3t \\ \cos 3t - 3\sin 3t \end{pmatrix} + c_2 e^{6t}\begin{pmatrix} 5\sin 3t \\ 3\cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix} - \frac{1}{9}e^{6t}\begin{pmatrix} 20 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

A kezdeti feltételt behelyettesítve kapjuk

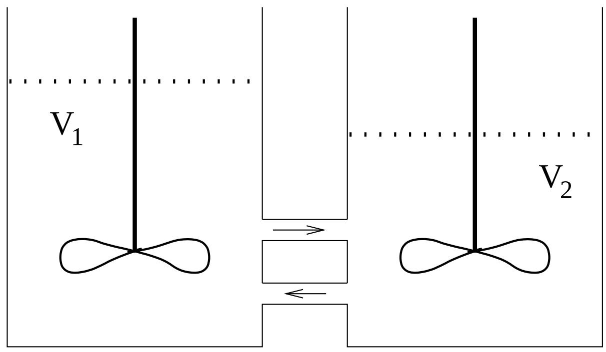
$$\begin{aligned} 5c_1 - \frac{20}{9} &= 1 \\ c_1 + 3c_2 - \frac{31}{9} &= -1, \end{aligned}$$

amelyet megoldva $c_1 = \frac{29}{45}$ és $c_2 = \frac{3}{5}$, ezért a kezdeti érték feladat megoldása

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \frac{29}{45}e^{6t}\begin{pmatrix} 5\cos 3t \\ \cos 3t - 3\sin 3t \end{pmatrix} + \frac{3}{5}e^{6t}\begin{pmatrix} 5\sin 3t \\ 3\cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix} - \frac{1}{9}e^{6t}\begin{pmatrix} 20 \\ 31 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9}e^{6t}\begin{pmatrix} 29\cos 3t + 27\sin 3t - 20 \\ 22\cos 3t - 12\sin 3t - 31 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

□

4.7. Alkalmazások



4.1. Ábra. kettős tank

4.33. Példa. Tegyük fel, hogy adott két tank (lásd a 4.1. Ábrát), amelyeket két csővel összekötünk. Az egyik csövön r l/perc sebességgel pumpáljuk át a folyadékot az első tartályból a másodikba, a másikon pedig r l/perc sebességgel pumpáljuk át a folyadékot a második tartályból az elsőbe. Az első tartályban V_1 l, a másodikban pedig V_2 l sóoldat van. Kezdetben az első tartályban A_1 kg, a másodikban pedig A_2 kg só van feloldva. A két csőben elhanyagolható a folyadékmennyiség, és az oldatnak a csőben való tartózkodási ideje elhanyagolható. Feltesszük továbbá azt is, hogy a két tartályban az oldatokat folyamatosan keverjük, az oldatok rögtön ideálisan összekeverednek. Számítsuk ki, hogy mennyi só oldat lesz az egyes tartályokban a t időpontban!

Vegyük észre, hogy az egyes tartályokban a folyadék mennyisége konstans marad. Jelölje $Q_1 = Q_1(t)$ az első, $Q_2 = Q_2(t)$ a második tartályban levő só tömegét a t időpontban. Ekkor az első tartály koncentrációja Q_1/V_1 kg/l, a másodiké pedig Q_2/V_2 kg/l lesz. Ezért az első tartályban a só tömege rQ_1/V_1 kg/perc sebességgel csökken, de egyben rQ_2/V_2 kg/perc sebességgel nő. Könnyen látható, hogy teljesül a

$$\begin{aligned} Q_1' &= -r\tfrac{Q_1}{V_1} + r\tfrac{Q_2}{V_2}, \qquad Q_1(0) = A_1 \\ Q_2' &= r\tfrac{Q_1}{V_1} - r\tfrac{Q_2}{V_2}, \qquad Q_2(0) = A_2 \end{aligned} \tag{4.34}$$

lineáris egyenletrendszer.

Nézzük azt a konkrét esetet, amikor az első tartályban 50 l tiszta viz, a másodikban pedig 100 l, kezdetben 3/4 kg/l koncentációjú sóoldat van kezdetben. Tegyük fel, hogy a pumpálás sebessége 5 l/perc. Ekkor a (4.34) egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} Q_1' &= -\tfrac{1}{10}Q_1 + \tfrac{1}{20}Q_2, \qquad Q_1(0) = 0 \\ Q_2' &= \tfrac{1}{10}Q_1 - \tfrac{1}{20}Q_2, \qquad Q_2(0) = 75. \end{aligned}$$

Az együtthatómátrix karakterisztikus polinomja

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{10} - \lambda & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{20} - \lambda \end{pmatrix} = \left(\lambda + \frac{1}{10}\right)\left(\lambda + \frac{1}{20}\right) - \frac{1}{10}\frac{1}{20} = \lambda\left(\lambda + \frac{3}{20}\right).$$

Így $\lambda = 0, -\frac{3}{20}$. Könnyen ellenőrizhető, hogy a megfelelő sajátvektorok: $(1,2)^T$ és $(1,-1)^T$. Ezért az egyenletrendszer általános megoldása

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\frac{3}{20}t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

A kezdeti feltételeket felhasználva ebből kiszámítható, hogy

$$Q_1 = 25 - 25e^{-\frac{3}{20}t}, \qquad Q_2 = 50 + 25e^{-\frac{3}{20}t}.$$

□

A következő két példában nemlineáris egyenletrendszerekre mutatunk példát. Ezek megoldásait nem tudjuk analitikusan megadni.

4.34. Példa. (ragadozó-zsákmány modell) Tegyük fel, hogy egy olyan biológiai rendszert vizsgálunk, ahol kétfajta egyed él: ragadozó és zsákmány, azaz az egyik tápláléka a másik egyed. Tipikus eset például egy olyan halastó, amelyben kétfajta hal él. Jelölje $x = x(t)$ a zsákmány, $y = y(t)$ pedig a ragadozók egyedszámát a t időpontban. Feltesszük, hogy a zsákmány egyed életfeltételei a ragadozók jelenléte nélkül ideálisak, azaz a Malthus-modell szerint szaporodnak (lásd az 1.26. Példát). Feltesszük tehát, hogy a zsákmány szaporodási sebessége ax, ahol $a > 0$. Másrészt a zsákmány egyedek száma csökken a ragadozók jelenléte miatt. Természetes feltevés, hogy a zsákmány halálozási sebessége a ragadozó és zsákmány találkozások számával arányos, ami pedig az összes zsákmány-ragadozó párok számával arányos: bxy, ahol $b > 0$. Tehát $x' = ax - bxy$. Másrészt a ragadozók a zsákmány jelenléte nélkül kihalnak az egyedszámmal arányos sebességgel: cy, $(c > 0)$, de a zsákmány-ragadozó párok számával arányos sebességgel nő a számuk: dxy, $(d > 0)$. Teljesül tehát ebben az esetben az

$$\begin{aligned} x' &= x(a - by) \\ y' &= y(-c + dx) \end{aligned} \tag{4.35}$$

nemlineáris egyenletrendszer. □

4.35. Példa. (versengő egyedek) Egy másik két egyedet tartalmazó modell esetében azt tesszük fel, hogy a másik egyed jelenléte nélkül mindkét egyed a Verhulst-féle logisztikus modell szerint szaporodna: $x' = ax - bx^2$, $y' = dy - fy^2$. A másik egyed jelenléte hatására viszont az egyedszámuk a két egyed találkozásai számával arányos sebességgel csökken, mivel versengeni fognak a táplálékért:

$$\begin{aligned} x' &= x(a - bx - cy) \\ y' &= y(d - ex - fy), \end{aligned} \tag{4.36}$$

ahol $a, b, c, d, e, f > 0$. □