3. Magasabbrendű skaláris differenciálegyenletek

3.1. Bevezetés

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum, és legyenek $p_{n-1}, \dots, p_1, p_0 \colon I \to \mathbb{R}$ folytonos függvények. Tekintsük az

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x), \qquad x \in I \tag{3.1}$$

n-edrendű inhomogén lineáris skaláris differenciálegyenletet és a megfelelő *n-edrendű homogén lineáris skaláris differenciálegyenletet*:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0, \qquad x \in I. \tag{3.2}$$

Az egyenletekhez az

$$y(x_0) = z_1, \quad y'(x_0) = z_2, \quad \dots \quad y^{(n-1)}(x_0) = z_n \tag{3.3}$$

kezdeti feltételeket rendeljük, ahol $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{R}$.

Megmutattuk az 1.37. Tételben, hogy a (3.1) egyenletnek bármely (3.3) kezdeti feltételhez létezik egyértelmű megoldása az I intervallumon.

Könnyen ellenőrizhető, ahogy azt az elsőrendű esetben részletesen megmutattuk, hogy a homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásai lineáris teret alkotnak:

3.1. Tétel. *Legyen y_1 és y_2 megoldása a (3.2) egyenletnek az I intervallumon. Ekkor $c_1y_1+c_2y_2$ is megoldása a (3.2) egyenletnek az I intervallumon minden $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$-re (vagy $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$-re), azaz a (3.2) egyenlet megoldásainak halmaza lineáris tér.*

Másodrendű eset mintájára definiáljuk n darab függvény Wronski-determinánsát:

3.2. Definíció. Legyen $y_1, y_2, \dots y_n \colon I \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvények. A

$$W(y_1, \dots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

$n \times n$-es determinánst az $y_1, y_2, \dots y_n$ függvények *Wronski-determinánsának* hívjuk.

A 2.5. Tétel triviális általánosításaként kapjuk az alábbi eredményt.

3.3. Tétel. *Az $y_1, y_2, \dots, y_n \colon I \to \mathbb{R}$ függvények lineárisan függetlenek az I intervallumon, ha létezik olyan $x_0 \in I$, hogy $W(y_1, \dots, y_n)(x_0) \neq 0$. Ha $y_1, y_2, \dots, y_n$ lineárisan összefüggő az I intervallumon, akkor $W(y_1, \dots, y_n)(x_0) = 0$ minden $x \in I$-re.*

A 2.6. Tétel általánosításaként meg lehet mutatni az alábbi eredményt. A bizonyítása ugyan nem nehéz, de hosszadalmas, így elhagyjuk.

3.4. Tétel (Abel–Liouville-tétel). *Legyen $y_1, y_2, \dots, y_n$ megoldása a (3.2) egyenletnek az I intervallumon. Ekkor*

$$W(y_1, \dots, y_n)(x) = c \exp\left(-\int p_{n-1}(x)\, dx\right), \qquad x \in I.$$

3.5. Következmény. *Legyen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ megoldása a (3.2) egyenletnek az I intervallumon. Ekkor vagy $W(y_1, \ldots, y_n)(x) = 0$ minden $x \in I$-re vagy $W(y_1, \ldots, y_n)(x) \neq 0$ minden $x \in I$-re.*

3.6. Definíció. Az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ függvényeket a (3.2) egyenlet *fundamentális megoldásának* hívjuk, ha $y_1, y_2, \ldots, y_n$ megoldása a (3.2) egyenletnek, és $y_1, y_2, \ldots, y_n$ lineárisan függetlenek I-n, azaz $W(y_1, \ldots, y_n)(x) \neq 0$, ha $x \in I$.

Tegyük fel, hogy az $y_1, \ldots, y_n$ függvények a (3.2) egyenlet

$$\begin{aligned} y_1(x_0) &= z_1^{(1)}, \quad y_1'(x_0) = z_2^{(1)}, \quad \ldots \quad y_1^{(n-1)}(x_0) = z_n^{(1)} \\ &\vdots \\ y_n(x_0) &= z_1^{(n)}, \quad y_n'(x_0) = z_2^{(n)}, \quad \ldots \quad y_n^{(n-1)}(x_0) = z_n^{(n)} \end{aligned}$$

kezdeti feltételekhez tartozó megoldásai. A 3.5. Tétel szerint az $y_1, \ldots, y_n$ linearis függetlenségéhez tehát elegendő egy pontban ellenőrizni, hogy a Wronski-determináns nem nulla. Ha ezt az x_0 pontban ellenőrizzük, akkor

$$W(y_1, \ldots, y_n)(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1^{(1)} & z_1^{(2)} & \cdots & z_1^{(n)} \\ z_2^{(1)} & z_2^{(2)} & \cdots & z_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_n^{(1)} & z_n^{(2)} & \cdots & z_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Kapjuk, hogy $y_1, \ldots, y_n$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha a kezdeti feltételekből alkotott $\mathbf{z}^{(1)} = (z_1^{(1)}, \ldots, z_n^{(1)})^T, \ldots, \mathbf{z}^{(n)} = (z_1^{(n)}, \ldots, z_n^{(n)})^T$ vektorok lineárisan függetlenek. Kapjuk ezért, hogy mindig létezik (végtelen sok különböző) fundamentális rendszere a (3.2) egyenletnek.

A 2.9. Tétel bizonyítását könnyen általánosítva kapjuk az alábbi eredményt.

3.7. Tétel. *Legyen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ fundamentális megoldása a (3.2) egyenletnek az I intervallumon. Ekkor bármely $z_1, \ldots, z_n$ kezdeti feltételhez létezik olyan $c_1, \ldots, c_n$, hogy $c_1y_1 + \cdots + c_ny_n$ teljesíti a (3.3) kezdeti feltételeket.*

3.8. Következmény. *A (3.2) egyenlet megoldásainak halmaza n-dimenziós lineáris tér.*

Az első- és másodrendű eseteknél látott eredmények nyilvánvaló általánosításaként kapjuk az alábbi eredményeket:

3.9. Tétel. *Legyen y_1 és y_2 a (3.1) inhomogén egyenlet két tetszőleges megoldása. Ekkor az $y = y_1 - y_2$ függvény megoldása a (3.2) homogén egyenletnek.*

3.10. Tétel. *Legyen y_H a (3.2) homogén egyenlet általános megoldása, és y_{IP} a (3.1) inhomogén egyenlet egy partikuláris (rögzített) megoldása. Ekkor a (3.1) inhomogén egyenlet általános megoldásának képlete*

$$y_{IH} = y_H + y_{IP}.$$

3.2. Konstans együtthatós magasabbrendű homogén lineáris differenciálegyenletek

Legyen $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ ($a_n \neq 0$) és tekintsük az

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{3.4}$$

konstans együtthatós n-edrendű homogén lineáris skaláris differenciálegyenletet. Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

akkor és csak akkor megoldása a (3.1) egyenletnek, ha λ teljesíti az

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \tag{3.5}$$

algebrai egyenletet. A (3.5) egyenletet a (3.4) egyenlet *karakterisztikus egyenletének*, a

$$p(\lambda) := a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$$

n-edfokú polinomot pedig a (3.4) egyenlet *karakterisztikus polinomjának* nevezzük.

A 3.8. Következmény értelmében a célunk az, hogy találjunk n-darab lineárisan független megoldását a (3.4) egyenletnek, mert akkor azok fundamentális rendszert alkotnak, azaz lineáris kombinációjuk visszaadja az egyenlet általános megoldását.

1. Tegyük fel először, hogy a (3.5) egyenletnek $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ n darab páronként különböző valós megoldása van. Ekkor

$$e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$$

megoldásai a (3.4) egyenletnek, továbbá lineárisan függetlenek is. Ehhez számítsuk ki a Wronski-determinánsukat:

$$W(y_1, \ldots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \cdots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix}.$$

a (3.5) egyenletnek A determináns oszlopaiból kiemelve a közös szorzótényezőket kapjuk, hogy

$$W(y_1, \ldots, y_n)(x) = e^{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Lineáris algebrából ismert, hogy az

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

ú.n. Vandermonde-determináns akkor és csak akkor nem nulla, ha a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ számok páronként különbözők. Ezért $W(y_1, \ldots, y_n)(x) \neq 0$.

2. Tegyük fel most, hogy λ_1 k_1-szeres gyöke a (3.5) egyenletnek. Ekkor megmutatjuk, hogy az

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2(x) = x e^{\lambda_1 x}, \quad y_3(x) = x^2 e^{\lambda_1 x}, \quad \ldots, \quad y_{k_1}(x) = x^{k_1 - 1} e^{\lambda_1 x} \tag{3.6}$$

függvények k_1 db lineárisan független megoldását képezik a (3.4) egyenletnek.

Jelölje

$$p(\lambda) := a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

A feltételek szerint

$$p(\lambda_1) = p'(\lambda_1) = \cdots = p^{(k_1-1)}(\lambda_1) = 0. \tag{3.7}$$

Jelölje a (3.4) egyenlet bal oldalát leíró lineáris leképezést L, azaz

$$L(y) := a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y.$$

Láttuk korábban, hogy

$$L(e^{\lambda x}) = a_n\frac{\partial^n}{\partial x^n}(e^{\lambda x}) + a_{n-1}\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}(e^{\lambda x}) + \cdots + a_1\frac{\partial}{\partial x}(e^{\lambda x}) + a_0 e^{\lambda x} = p(\lambda)e^{\lambda x},$$

azaz $L(e^{\lambda_1 x}) = 0$. Mivel

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}(e^{\lambda x}) = xe^{\lambda x} \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial^2}{\partial x\partial\lambda}(e^{\lambda x}) = \frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial x}(e^{\lambda x}),$$

ezért

$$\begin{aligned}
L(xe^{\lambda x}) &= a_n\frac{\partial^n}{\partial x^n}(\frac{\partial}{\partial\lambda}e^{\lambda x}) + a_{n-1}\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}(\frac{\partial}{\partial\lambda}e^{\lambda x}) + \cdots + a_1\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial\lambda}e^{\lambda x}) + a_0\frac{\partial}{\partial\lambda}e^{\lambda x}\\
&= \frac{\partial}{\partial\lambda}\Big(a_n\frac{\partial^n}{\partial x^n}(e^{\lambda x}) + a_{n-1}\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}(e^{\lambda x}) + \cdots + a_1\frac{\partial}{\partial x}(e^{\lambda x}) + a_0 e^{\lambda x}\Big)\\
&= \frac{\partial}{\partial\lambda}\Big(p(\lambda)e^{\lambda x}\Big)\\
&= p'(\lambda)e^{\lambda x} + p(\lambda)\lambda e^{\lambda x},
\end{aligned}$$

így a (3.7) feltételeket használva kapjuk, hogy

$$L(xe^{\lambda_1 x}) = 0.$$

Ennek mintájára és a

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j}\Big(f(x)g(x)\Big) = \sum_{\ell=0}^{j}\binom{j}{\ell} f^{(\ell)}(x)g^{(j-\ell)}(x)$$

azonosságot használva belátható, hogy

$$L(x^j e^{\lambda x}) = \frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}\Big(p(\lambda)e^{\lambda x}\Big) = \sum_{\ell=0}^{j}\binom{j}{\ell} p^{(\ell)}(\lambda)\lambda^{j-\ell}e^{\lambda x},$$

amiből a (3.7) feltételek szerint következik

$$L(x^j e^{\lambda_1 x}) = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, k_1 - 1.$$

Megmutatjuk, hogy a (3.6) függvények lineárisan függetlenek. Ehhez $m = 1, 2, \ldots, k_1 - 1$-re használjuk az

$$y_m^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, m-2, \qquad y_m^{(m-1)}(0) = (m-1)!$$

összefüggéseket:

$$W(y_1, \ldots, y_{k_1})(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ * & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ * & * & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ * & * & * & 3! & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ * & * & * & * & \cdots & (k_1-2)! & 0\\ * & * & * & * & \cdots & * & (k_1-1)! \end{vmatrix} = 2\cdot 3!\cdots(k_1-2)!\cdot(k_1-1)! \neq 0.$$

Ebből következik a 3.5. Következmény szerint, hogy $W(y_1, \dots, y_{k_1})(x) \neq 0$ minden x-re, azaz a (3.6) függvények lineárisan függetlenek.

3. Tekintsük most az általános esetet, legyen λ_1 k_1-szeres, λ_2 k_2-szeres, ..., λ_m pedig k_m-szeres gyöke a (3.5) egyenletnek, ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ páronként különböznek és $k_1+k_2+\dots+k_m = n$. Ekkor láttuk, hogy

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \dots, x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_2 x}, \dots, x^{k_2-1}e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_m x}, xe^{\lambda_m x}, \dots, x^{k_m-1}e^{\lambda_m x}$$

megoldásai a (3.4) egyenletnek. Megmutatjuk, hogy ezek lineárisan függetlenek is, azaz a (3.4) egyenlet fundamentális rendszerét alkotják. A fenti függvények Wronski-determinánsát nem könnyű kiértékelni, ezért most a lineáris függetlenség definícióját alkalmazzuk: Tegyük fel, hogy valamely $c_{11}, \dots, c_{1k_1}, c_{21}, \dots, c_{2k_2}, \dots, c_{m1}, \dots, c_{mk_m}$ konstansokra

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} x^{j-1} e^{\lambda_i x} = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Megmutatjuk, hogy ekkor minden együttható nulla kell legyen. Jelölje

$$G_i(x) := \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} x^{j-1}.$$

Ekkor G_i egy $k_i - 1$-edfokú polinom, amelyre

$$\sum_{i=1}^{m} G_i(x) e^{\lambda_i x} = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Beszorozva ezt az egyenletet az $e^{-\lambda_1 x}$ függvénnyel kapjuk, hogy

$$G_1(x) + \sum_{i=2}^{m} G_i(x) e^{(\lambda_i - \lambda_1)x} = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Ezt k_1-szer deriválva kapjuk, hogy

$$\sum_{i=2}^{m} \tilde{G}_i(x) e^{(\lambda_i - \lambda_1)x} = 0, \qquad x \in \mathbb{R},$$

és ezért

$$\sum_{i=2}^{m} \tilde{G}_i(x) e^{\lambda_i x} = 0, \qquad x \in \mathbb{R},$$

ahol $\tilde{G}_i$ ugyanolyan fokszámú polinom, mint G_i. Ezt tovább folytatva kapjuk, hogy létezik olyan H polinom, amelynek fokszáma megegyezik G_m fokszámával, amelyre

$$H(x) e^{\lambda_m x} = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

De ez csak úgy lehet, ha H, és így G_m is azonosan nulla. Mivel a gyökök sorrendje tetszőleges lehet, ebből adódik, hogy minden $i = 1, \dots, m$-re G_i azonosan nulla, azaz minden c_{ij} együttható nulla, és így a függvények lineárisan függetlenek.

Kaptuk tehát, hogy ebben az esetben a (3.4) egyenlet általános megoldása

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} x^{j-1} e^{\lambda_i x}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{3.8}$$

4. Ha a (3.5) egyenletnek λ_1 komplex gyöke, akkor a (3.6) függvények komplex megoldást adnak. Valós megoldást a következőképpen kaphatunk:

Tegyük fel, hogy $\lambda = \alpha + i\beta$ egy k-szoros gyöke a (3.5) egyenletnek. Ekkor persze $\alpha - i\beta$ is k-szoros gyöke a (3.5) egyenletnek. Ekkor

$$x^j e^{(\alpha+i\beta)x} = x^j e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

és

$$x^j e^{(\alpha-i\beta)x} = x^j e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

megoldásai a (3.4) egyenletnek $j = 0, 1, \ldots, k-1$-re, és ezért, ahogy azt a másodrendű homogén egyenleteknél láttuk, ezek valós és képzetes része, azaz

$$x^j e^{\alpha x}\cos\beta x \qquad \text{és} \qquad x^j e^{\alpha x}\sin\beta x$$

is lineárisan független megoldások $j = 0, 1, \ldots, k-1$-re.

5. A kapott eredményeket a következőképpen foglalhatjuk össze: Legyen $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ a (3.5) egyenlet páronként különböző valós gyökei a $k_1, \ldots, k_s$ multiplicitásokkal, továbbá legyen

$$\tilde\lambda_1 = \alpha_1 \pm i\beta_1, \ldots \tilde\lambda_r = \alpha_r \pm i\beta_r$$

a (3.5) egyenlet páronként különböző komplex gyök párjai a $\tilde k_1, \ldots, \tilde k_r$ multiplicitásokkal, ahol

$$k_1 + \cdots + k_s + 2(\tilde k_1 + \cdots + \tilde k_r) = n.$$

Ekkor a (3.4) egyenlet általános megoldása

$$y(x) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k_i} c_{ij}x^{j-1}e^{\lambda_i x} + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\tilde k_i} d_{ij}x^{j-1}e^{\alpha_i x}\cos\beta_i x + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\tilde k_i} e_{ij}x^{j-1}e^{\alpha_i x}\sin\beta_i x, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{3.9}$$

3.11. Példa. Keressük meg az

$$y^{(6)} + 6y^{(4)} - 7y'' = 0$$

egyenlet általános megoldását! Az egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^6 + 6\lambda^4 - 7\lambda^2 = 0,$$

azaz a karakterisztikus polinomja

$$p(\lambda) = \lambda^6 + 6\lambda^4 - 7\lambda^2.$$

p-t szorzattá alakíthatjuk, mivel λ^2-et kiemelve p-ből egy λ^2-ben másodfokú kifejezést kapunk:

$$p(\lambda) = \lambda^2(\lambda^4 + 6y^2 - 7) = \lambda^2(\lambda^4 + 6y^2 - 7) = \lambda^2(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 7).$$

Ezért

$$0, \quad 0, \quad 1, \quad -1, \quad \sqrt{7}i, \quad -\sqrt{7}i$$

a 6 gyöke p-nek. Kaptuk tehát, hogy

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3e^x + c_4e^{-x} + c_5\cos\sqrt{7}x + c_5\sin\sqrt{7}x$$

az általános megoldás képlete. $\square$

3.12. Példa. Keressük meg az

$$y^{(4)} + 4y^{(3)} + 14y'' + 20y' + 25y = 0$$

egyenlet általános megoldását! A megfelelő karakterisztikus polinom

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 14\lambda^2 + 20\lambda + 25.$$

Vegyük észre, hogy p teljes négyzet:

$$p(\lambda) = (\lambda^2 + 2\lambda + 5)^2,$$

így a karakterisztikus egyenlet gyökei

$$-1+2i, \quad -1+2i, \quad -1-2i, \quad -1-2i.$$

Tehát az egyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 e^{-x}\cos 2x + c_2 e^{-x}\sin 2x + c_3 x e^{-x}\cos 2x + c_4 x e^{-x}\sin 2x.$$

□

3.3. Inhomogén lineáris egyenletek megoldása konstans variációs módszerrel

Tekintsük újra az

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x), \qquad x \in I \tag{3.10}$$

inhomogén lineáris egyenletet és a megfelelő

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0, \qquad x \in I \tag{3.11}$$

homogén lineáris egyenletet.

Tegyük fel, hogy a (3.11) homogén egyenletnek ismerjük az

$$y_H(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

általános megoldását, azaz $y_1, \ldots, y_n$ egy fundamentális rendszere a (3.11) egyenletnek. Keressük a (3.10) inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását az

$$y_{IP}(x) = u_1(x)y_1(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x)$$

alakban. Ekkor a másodrendű egyenleteknél látott levezetést általánosítva kapható, hogy ha $u_1, \ldots, u_n$ teljesíti az

$$\begin{array}{ccccccc}
u_1'(x)y_1(x) & + & \cdots & + & u_n'(x)y_n(x) & = & 0 \\
u_1'(x)y_1'(x) & + & \cdots & + & u_n'(x)y_n'(x) & = & 0 \\
\vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
u_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) & + & \cdots & + & u_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) & = & 0 \\
u_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) & + & \cdots & + & u_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) & = & f(x)
\end{array} \tag{3.12}$$

egyenletrendszert, akkor y_{IP} megoldása a (3.10) egyenletnek, és ekkor az $y = y_H + y_{IP}$ függvény általános megoldása a (3.11) egyenletnek. Megjegyezzük, hogy a (3.12) egyenlet egy lineáris egyenletrendszer az $u_1', \ldots, u_n'$ függvényekre nézve, amely mindig megoldható, hiszen az együtthatómátrix determinánsa pontosan $W(y_1, \ldots . y_n)(x)$, amely nem nulla I-n, hiszen $y_1, \ldots, y_n$ fundamentális rendszer.

3.13. Példa. Adjuk meg az

$$y^{(4)} - 13y'' + 36y = e^{-x} \tag{3.13}$$

általános megoldását! A homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^4 - 13\lambda^2 + 36 = 0,$$

amelynek megoldásai:

$$2, \quad -2, \quad 3, \quad -3.$$

Ezért a homogén egyenlet általános megoldása

$$y_H = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-3x}.$$

A konstansok variálásának módszerét alkalmazva keressük a partikuláris megoldást az

$$y_{IP} = u_1 e^{2x} + u_2 e^{-2x} + u_3 e^{3x} + u_4 e^{-3x}$$

alakban. A (3.12) egyenleteket felírva kapjuk, hogy

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} u_1' e^{2x} & + & u_2' e^{-2x} & + & u_3' e^{3x} & + & u_4' e^{-3x} & = & 0 \\ 2u_1' e^{2x} & - & 2u_2' e^{-2x} & + & 3u_3' e^{3x} & - & 3u_4' e^{-3x} & = & 0 \\ 4u_1' e^{2x} & + & 4u_2' e^{-2x} & + & 9u_3' e^{3x} & + & 9u_4' e^{-3x} & = & 0 \\ 8u_1' e^{2x} & - & 8u_2' e^{-2x} & + & 27u_3' e^{3x} & - & 27u_4' e^{-3x} & = & e^{-x} \end{array}$$

Ennek megoldása

$$u_1' = -\frac{1}{20} e^{-3x}, \quad u_2' = \frac{1}{20} e^{x}, \quad u_3' = \frac{1}{30} e^{-4x}, \quad u_4' = -\frac{1}{30} e^{2x},$$

és ezért

$$u_1 = \frac{1}{60} e^{-3x}, \quad u_2 = \frac{1}{20} e^{x}, \quad u_3 = -\frac{1}{120} e^{-4x}, \quad u_4 = -\frac{1}{60} e^{2x}.$$

Kaptuk tehát, hogy

$$y_{IP} = \frac{1}{60} e^{-3x} e^{2x} + \frac{1}{20} e^{x} e^{-2x} - \frac{1}{120} e^{-4x} e^{3x} - \frac{1}{60} e^{2x} e^{-3x} = \frac{1}{24} e^{-x},$$

és így az egyenlet általános megoldása

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-3x} + \frac{1}{24} e^{-x}$$

□

Megjegyezzük, hogy a próbafüggvény módszerét is alkalmazhatjuk az előbbi példában: $y_{IP} = Ae^{-x}$ alakban keresve a partikuláris megoldást, egyértelműen meghatározhatjuk A értékét:

$$y_{IP}' = -Ae^{-x}, \qquad y_{IP}'' = Ae^{-x}, \qquad y_{IP}''' = -Ae^{-x}, \qquad y_{IP}^{(4)} = Ae^{-x}.$$

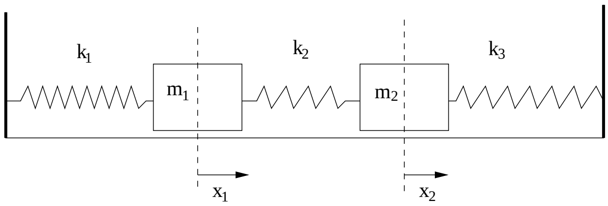
A (3.13) egyenletbe behelyettesítve

$$Ae^{-x} - 13Ae^{-x} + 36Ae^{-x} = e^{-x},$$

azaz $24A = 1$, és így $A = 1/24$.

A 2.4. szakaszban a konstans együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenletek partikuláris megoldásának keresésére megismert módszert magasabbrendű egyenletekre is alkalmazhatjuk a 2.4. szakasz 1. táblázatában leírt inhomogén tagok esetében, annyi módosítással, hogy szükség esetén az $s = 0, 1, \ldots, n$ kitevőt választjuk a próbafüggvény képletben. Részletekbe itt nem megyünk bele.

3.4. Alkalmazások



3.1. Ábra. összekapcsolt rugós rendszer

3.14. Példa. Tekintsünk két, m_1 és m_2 tömegű testet, amelyeket a 3.1. Ábrán látható módon három rugó fog közre. A két szélső rugó falhoz rögzített. A három rugó rugóállandója rendre k_1, k_2 és k_3. A testek nyugalmi pozíciójukhoz képesti elmozdulását jelölje x_1 és x_2, ahol a pozitív irányt jobbra választjuk. Tegyük fel, hogy az eredeti hosszukhoz képest L_1, L_2 illetve L_3 egységgel vannak megnyújtva (összenyomva) a rugók a nyugalmi helyzetben. Ekkor a rugóerők egyenlősége miatt $k_1L_1 = k_2L_2 = k_3L_3$ teljesül. Ha a nyugalmi helyzetükből kimozdítjuk a rugókat, és esetleg valamilyen kezdősebességet is adunk a testeknek, akkor a testek mozogni kezdenek az egyes testekre ható rugóerők hatására. Ha az első test x_1 egységgel mozdult el a nyugalmi helyzethez képest, akkor a rugó teljes megnyúlása x_1+L_1. Ekkor ha $x_1+L_1 > 0$, akkor az első rugó balra visszahúzza az első testet, így a testre az első rugó által ható erő $-k_1(x_1+L_1)$. Ha viszont $x_1 + L_1 < 0$, akkor az első rugó jobbra, azaz pozitív irányba tolja a testet, így ebben az esetben is $-k_1(x_1 + L_1)$ adja a rugóerő irányát és nagyságát. A második rugó az eddigi állapotához képest $x_2 - x_1$ egységgel, azaz az eredeti hosszához képest $x_2 - x_1 + L_2$ egységgel lesz megnyújtva vagy összenyomva. Mint az előbb, most is ellenőrizhető, hogy mindkét esetben a második rugó $k_2(x_2 - x_1 + L_2)$ erővel hat az első testre. Tegyük fel, hogy az első test és a talaj közötti surlódási együttható c_1. Ekkor a mozgás közben $-c_1x_1'$ surlódási erő hat a testre. Ezért Newton I. törvénye szerint teljesül az

$$m_1x_1'' = -k_1(x_1 + L_1) + k_2(x_2 - x_1 + L_2) - c_1x_1'$$

egyenlet. Ezt az $k_1L_1 = k_2L_2$ összefüggést felhasználva egyszerűsíthetjük:

$$m_1x_1'' = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) - c_1x_1'. \tag{3.14}$$

Ugyanígy indokolható, hogy a második testre teljesül az

$$m_2x_2'' = k_3(L_3 - x_2) - k_2(x_2 - x_1 + L_2) - c_2x_2'$$

egyenlet, ahol c_2 a második test és a talaj közötti surlódási együttható, és így egyszerűsítés után

$$m_2x_2'' = -k_3x_2 - k_2(x_2 - x_1) - c_2x_2' \tag{3.15}$$

adódik. Fejezzük x_1-et a (3.15) egyenletből:

$$x_1 = \frac{m_2x_2'' + c_2x_2' + (k_2 + k_3)x_2}{k_2}, \tag{3.16}$$

és ezt visszahelyettesítjük a (3.14) egyenletbe:

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{k_2}(m_2x_2^{(4)} + c_2x_2''' + (k_2 + k_3)x_2'') &= -\frac{k_1 + k_2}{k_2}(m_2x_2'' + c_2x_2' + (k_2 + k_3)x_2) \\ &\quad -\frac{c_1}{k_2}(m_2x_2''' + c_2x_2'' + (k_2 + k_3)x_2') + k_2x_2. \end{aligned}$$

Ez egy
$$a_4 x_2^{(4)} + a_3 x_2''' + a_2 x_2'' + a_1 x_2' + a_0 x = 0$$
alakú negyedrendű homogén lineáris egyenlet x_2-re, ahol
$$\begin{aligned} a_4 &= m_1 m_2 \\ a_3 &= m_1 c_2 + m_2 c_1 \\ a_2 &= m_1(k_2 + k_3) + m_2(k_1 + k_2) + c_1 c_2 \\ a_1 &= c_1(k_2 + k_3) + c_2(k_1 + k_2) + c_1 c_2 \\ a_0 &= k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3. \end{aligned}$$

Tegyük fel most, hogy a surlódási erő mindkét testnél elhanyagolható, azaz $c_1 = c_2 = 0$. Feltesszük továbbá, hogy $k_1 = k_3 = 2$, $k_2 = 1$, az első testet jobbra 1 egységgel, a másodikat pedig balra 1 egységgel elmozdítjuk, majd elengedjük a testeket (azaz kezdősebességet nem adunk nekik). Ekkor az
$$x_2^{(4)} + 6x_2'' + 8x_2 = 0$$
egyenletet kapjuk. Ennek karakterisztikus egyenlete:
$$\lambda^4 + 6\lambda^2 + 8 = 0,$$
amiből $\lambda^2 = -2$ vagy $\lambda^2 = -4$, azaz $\lambda = \pm\sqrt{2}i, \pm 2i$. Kapjuk tehát, hogy
$$x_2 = c_1 \cos\sqrt{2}t + c_2 \sin\sqrt{2}t + c_3 \cos 2t + c_4 \sin 2t.$$

Ebből
$$\begin{aligned} x_2' &= -\sqrt{2}c_1 \sin\sqrt{2}t + \sqrt{2}c_2 \cos\sqrt{2}t - 2c_3 \sin 2t + 2c_4 \cos 2t \\ x_2'' &= -2c_1 \cos\sqrt{2}t - 2c_2 \sin\sqrt{2}t - 4c_3 \cos 2t - 4c_4 \sin 2t. \end{aligned}$$

Ezért a (3.16) képlet szerint
$$x_1 = x_2'' + 3x_2 = c_1 \cos\sqrt{2}t + c_2 \sin\sqrt{2}t - c_3 \cos 2t - c_4 \sin 2t.$$

Számítsuk ki:
$$x_1' = -\sqrt{2}c_1 \sin\sqrt{2}t + \sqrt{2}c_2 \cos\sqrt{2}t + 2c_3 \sin 2t - 2c_4 \cos 2t.$$

Az
$$x_1(0) = 1, \qquad x_1'(0) = 0, \qquad x_2(0) = -1, \qquad x_2'(0) = 0$$
kezdeti feltételeket felhasználva kapjuk
$$\begin{aligned} c_1 - c_3 &= 1 \\ \sqrt{2}c_2 - 2c_4 &= 0 \\ c_1 + c_3 &= -1 \\ \sqrt{2}c_2 + 2c_4 &= 0, \end{aligned}$$
amiből kapjuk, hogy $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = -1$ és $c_4 = 0$, azaz
$$x_1 = \cos 2t \qquad \text{és} \qquad x_2 = -\cos 2t$$
harmonikus rezgőmozgást végez mindkét test. A megoldások szimmetriája nyilvánvaló, hiszen a feltételek szerint a rendszer paraméterei is szimmetrikusak voltak.

Egy másik lehetőség a (3.14)-(3.15) rendszer átalakítására az, ha bevezetjük az
$$y_1 = x_1, \qquad y_2 = x_1', \qquad y_3 = x_2, \qquad y_4 = x_2'$$

új változókat. Ekkor a (3.14)-(3.15) rendszer ekvivalens alakja:

$$\begin{aligned}
y_1' &= y_2 \\
y_2' &= -\frac{k_1}{m_1}y_1 + \frac{k_2}{m_1}(y_3 - y_1) - \frac{c_1}{m_1}y_2 \\
y_3' &= y_4 \\
y_4' &= -\frac{k_3}{m_2}y_3 - \frac{k_2}{m_2}(y_3 - y_1) - \frac{c_2}{m_2}y_4.
\end{aligned}$$

Az $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$ vektor változó tehát teljesíti az $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ elsőrendű homogén lineáris négydimenziós egyenletrendszert, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & -\frac{c_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_2+k_3}{m_2} & -\frac{c_2}{m_2} \end{pmatrix}.$$

Ilyen lineáris rendszerek megoldásával a következő fejezetben foglalkozunk. □